ANTONIO TRAJANO

Algebra Elementar

$$x^2 + 2px = q$$
$$x^2 + 2px + p^2 = q + p^2$$
$$x + p = \pm\sqrt{q + p^2}$$
$$x' = -p + \sqrt{q + p^2}$$
$$x'' = -p - \sqrt{q + p^2}$$

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

ÁLGEBRA ELEMENTAR

ÁLGEBRA ELEMENTAR

CONTENDO UM CURSO TEÓRICO E PRÁTICO DESTE RAMO DA CIÊNCIA
INCLUINDO AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E PROGRESSÕES,
EXPOSTO POR UM MÉTODO FACÍLIMO, SIMPLES
E MUITO COMPREENSIVEL

PELO PROFESSOR

ANTÔNIO TRAJANO

Autor da Aritmética Primária, Aritmética Elementar
e Aritmética Progressiva

26.ª EDIÇÃO
CUIDADOSAMENTE REVISTA

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO	BELO HORIZONTE
292, Rua Libero Badaró	Rua Rio de Janeiro, 655

1957

Obras do professor Antônio Trajano

PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA:

Aritmética Primária para os meninos e meninas que começam o estudo de Aritmética nas escolas primárias; contendo as quatro operações sôbre números inteiros e frações, expostas do modo mais simples, por meio de lições graduadas, e acompanhadas de exercícios e problemas próprios para o primeiro tirocínio do cálculo.

Aritmética Elementar Ilustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a matéria da Aritmética, que deve ser ensinada nas aulas primárias, exposta por um método atrativo e deleitável, e ornada de muitas gravuras adequadas ao texto. Obra premiada pelo jurí da Exposição Pedagógica do Rio de Janeiro, e adotada pela instrução pública em quasi todos os Estados do Brasil.

Aritmética Progressiva, curso completo, teórico e prático de Aritmética para o ensino secundário e superior, contendo todos os esclarecimentos úteis sôbre êste importante ramo da ciência. Obra adotada em muitas escolas normais, liceus e outros estabelecimentos de educação superior.

Chave da Aritmética Progressiva. Esta obra contém a solução completa de todos os problemas difíceis da Aritmética Progressiva; contém também a resposta de todos os exercícios e problemas que nesta Aritmética não levam resposta; contém ainda alguns exercícios interessantes para serem propostos aos discípulos.

Com esta chave, qualquer professor poderá vantajosamente e sem dificuldade alguma lecionar pela **Aritmética Progressiva,** certo de que não encontrará embaraço algum em todo o curso dêste compêndio.

Álgebra Elementar, contendo um curso teórico e prático dêste ramo da ciência, incluindo as equações do segundo grau e progressões, exposto por um método facílimo, simples e muito compreensível.

Chave da Álgebra. Esta obra apresenta a solução de todos os problemas e dificuldades da Álgebra Elementar, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina.

Observação

Antonio Trajano

PREFÁCIO

Na Inglaterra, na França, na Alemanha e principalmente nos Estados Unidos, a Álgebra é considerada como um dos ramos mais úteis e interessantes da instrução. Tal é a importância que alí se dá a esta matéria, que já foi incluída como parte do ensino obrigatório nas escolas primárias, onde os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema em uma equação algébrica.

Calcula-se que mais de quatrocentos mil compêndios de Álgebra se consomem anualmente nos Estados Unidos, e isto é suficiente para nos dar uma idéia do modo por que se aprecia e desenvolve êste ramo de estudo naquela grande e adiantada nação americana.

Não há alí ensino secundário ou superior de qualquer natureza que seja, que dispense o estudo acurado de Álgebra; no entanto, entre nós, nem mesmo nas faculdades de direito se exige o exame de Álgebra como preparatório para o estudo das ciências sociais e jurídicas! E, se nestes estabelecimentos de educação superior se dá tão pouco apreço a esta disciplina, que fará nos liceus e colégios onde nem mesmo Aritmética se ensina com perfeição?

Para podermos avaliar como esta materia é abandonada, ou para melhor dizer, ignorada entre nós, bastará só refletirmos que, se excetuarmos os homens formados em qualquer dos ramos das matemáticas, será bem difícil acharmos em nossas cidades pessoas que tenham conhecimento de Álgebra.

Felizmente já vemos sinais de grande melhoramento. O Estado de S. Paulo, que nestes últimos anos tanto se tem avantajado, ao ponto de apresentar um desenvolvimento material e uma atividade que causam pasmo, chegado a êste grau de engrandecimento, não pôde suportar por mais tempo

o sistema atrazado e rotineiro de ensino que os seus antepassados lhe legaram, e por isso acaba de fazer uma reforma completa na instrução pública, introduzindo, entre outros melhoramentos, o ensino obrigatório de Álgebra nas escolas primárias.

Êste exemplo será em breve seguido por outros Estados, e, em poucos anos, veremos a nossa mocidade aproveitar-se, com grande vantagem, da fôrça dessa alavanca poderosa do cálculo, chamada álgebra.

Para ajudarmos à desenvolver o gôsto por êste estudo tão proveitoso, apresentamos agora êste compêndio, que pela sua simplicidade, clareza e método, muito contribuirá para despertar nos discípulos o interêsse e gôsto por esta matéria que, ao mesmo tempo que é tão útil para a vida, é também tão recreativa para o espírito.

Para tornarmos mais atrativo e ameno êste estudo, abrandámos quanto foi possível o rigor algébrico; empregámos em todo o livro uma linguagem simples e apropriada; exemplificámos todas as teorias, resolvendo todas as dificuldades, e ilustrando cada ponto com numerosos exercícios e problemas interessantes e recreativos, e finalmente, abundamos em notas, explicações e referências, porque sabemos que muitos daqueles que hão de estudar por êste compêndio, não terão outro explicador nem outro auxiliar além do livro que lhes servirá de mestre.

Aqueles que estudarem com atenção êste pequeno curso de Álgebra, não perderão o seu tempo, porque não somente desenvolverão o seu raciocínio, e esclarecerão o seu espírito, mas ficarão também habilitados para resolver muitos cálculos que, de modo algum, resolveriam só com o auxílio da Aritmética.

ÁLGEBRA ELEMENTAR

1. Álgebra é a parte das matemáticas que resolve os problemas e demonstra os teoremas quando as quantidades são representadas por letras.

2. Símbolos algébricos são letras, números e sinais com que se exprimem as quantidades e efetuam as operações.

3. Problema é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas que se teem de obter por meio de quantidades conhecidas.

As quantidades conhecidas chamam-se **dados** do problema; as quantidades desconhecidas chamam-se **incógnitas,** e o processo por meio do qual se acham as quantidades desconhecidas, chama-se **solução.**

4. As quantidades conhecidas são representadas pelas primeiras letras do alfabeto: a, b, c, d, etc. As quantidades desconhecidas são representadas pelas últimas letras: x, y, z. Estas representações simbólicas teem o nome de **quantidades algébricas.**

Duas ou mais quantidades podem também ser representadas pela mesma letra, mas neste caso é necessário distingui-la com um ou mais acentos ou linhas, como x', x'', x''', que se lê: x primo, x segundo, x terceiro.

5. Teorema é uma proposição que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algébricas, e que pode tornar-se evidente por meio de uma demonstração.

6. Os sinais algébricos teem por fim indicar abreviadamente as operações que se teem de efetuar, e mostrar alguma relação que há entre as quantidades algébricas.

7. Os seguintes sinais teem em Álgebra a mesma significação que em Aritmética:

$+$ lê-se: *mais.*	$>$ lê-se: *maior do que.*
$-$ lê-se: *menos.*	$<$ lê-se: *menor do que.*
$\times$ lê-se: *multiplicado por* ou *vezes.*	$\sqrt{\ }$ lê-se: *raiz.*
$\div$ lê-se: *dividido por.*	:: lê-se: *está para.*
$=$ lê-se: *igual a.*	∞ lê-se: *infinito.*
$\pm$ lê-se: *mais ou menos.*	( ) Chama-se *parêntesis.*
	[ ] chama-se *colchete.*

Explicação dos sinais algébricos

8. O sinal =, escrito entre duas quantidades, mostra que estas quantidades são iguais em valor. Assim, a expressão $a = 3$, que se lê: *a igual a* 3, quer dizer que a quantidade representada pela letra *a* é igual a 3, isto é, tem o valor de 3.

9. O sinal +, escrito entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser somada com a primeira. Assim, $a+b$, que se lê: *a mais b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *b* deve juntar-se com a quantidade representada pela letra *a*. Se *a* fosse igual a 2, e *b*, igual a 3, o resultado da expressão seria: $a + b = 2 + 3 = 5$.

10. O sinal —, escrito entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser subtraída da primeira. Assim, $a - b$, que se lê: *a menos b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *b* deve ser subtraída da quantidade representada por *a*. Se *a* fosse igual a 5, e *b* igual a 3, o resultado seria: $a - b = 5 - 3 = 2$.

11. O sinal + chama-se também sinal positivo, e o sinal — chama-se sinal negativo. Toda a quantidade algébrica deve ser precedida por um dêstes sinais; a quantidade precedida do sinal +, chama-se **quantidade positiva,** e a precedida do sinal —, chama-se **quantidade negativa.** Quando o primeiro termo de uma expressão não tiver sinal algum, subentende-se o sinal +. Assim, $a - b$ quer dizer $+ a - b$.

12. Duas quantidades *têm o mesmo sinal* quando ambos os sinais são positivos ou ambos negativos. Teem *sinais contrários*, quando um é positivo e outro negativo. Assim, as quantidades $+a$ e $+b$ ou $-a$ e $-b$ teem o mesmo sinal; mas $+a$ e $-b$ teem sinais contrários.

13. O sinal ×, escrito entre duas quantidades, mostra que a primeira deve ser multiplicada pela segunda. Assim, $a \times b$, que se lê: *a multiplicado por b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *a* deve ser multiplicada pela quantidade representada por *b*; de sorte que se a letra *a* fosse igual a 4, e *b* igual a 5, o resultado seria $a \times b = 4 \times 5 = 20$.

14. Representa-se o produto de duas ou mais letras, escrevendo-se essas letras unidas umas às outras, como $a \times b = ab$; $b \times c \times d = bcd$.

Representa-se também o produto, escrevendo-se as letras separadas por um ponto, como $b \times c \times d = b.c.d$; mas êste modo caíu em desuso, porque se confunde com outras expressões algébricas.

15. As quantidades que devem ser multiplicadas chamam-se **fatores.** Se o fator é um número, chama-se **fator numérico,** isto quer dizer representado por um número. Se o fator é uma letra, chama-se **fator literal,** isto quer dizer representado por uma letra. Assim, $2 \times a \times b \times c$ são quatro fatores que, multiplicados, dão o produto $2abc$. O fator 2 é fator numérico e *a*, *b*, e *c* são fatores literais.

16. Seja qual fôr a ordem em que escrevemos as letras de um produto, o resultado será sempre o mesmo. Assim, $a \times b \times c = abc$; $b \times c \times a = bca$; $c \times a \times b = cab$. Ora, *abc*, *bca* e *cab* são quantidades iguais, como vamos verificar na seguinte

Ilustração. Se dermos à letra *a* o valor de 2, a *b* o valor de 3, e a *c* o valor de 4, teremos nas três ordens de fatores *abc*, *bca* e *cab* o mesmo produto, como vemos ao lado.

$abc = 2 \times 3 \times 4 = 24$
$bca = 3 \times 4 \times 2 = 24$
$cab = 4 \times 2 \times 3 = 24$

Para haver uniformidade no modo de exprimir um produto, escrevem-se sempre as letras na ordem alfabética; assim, o produto de $c \times a \times d \times b = abcd$.

Nota. o sinal × é quasi sempre omitido em Álgebra; pois em lugar de se escrever $a \times b$, escreve-se logo o produto que é ab.

17. O sinal ÷, escrito entre duas quantidades, mostra que a primeira quantidade deve ser dividida pela segunda. Assim, $a \div b$, que se lê: *a dividido por b*, quer dizer que a quantidade representada pelo letra *a* deve ser dividida pela quantidade representada por *b*. Se a letra *a* fosse igual a 6, e *b* igual a 2, o resultado seria $a \div b = 6 \div 2 = 3$.

18. Em álgebra como em aritmética, indica-se o quociente na forma de uma fração, escrevendo o divisor debaixo do dividendo, como $a \div b = \frac{a}{b}$. Omite-se sempre o sinal da divisão, e escreve-se logo o quociente $\frac{a}{b}$ que também se lê: *a dividido por b.*

19. O sinal >, escrito entre duas quantidades, mostra que a primeira é maior do que a segunda. Assim, $a > b$, que se lê: *a maior do que b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *a* é maior do que a representada pela letra *b*; assim também a expressão $c < d$, quer dizer que *c* é menor do que *d*. Sendo *c* igual a 4, e *d* igual a 7, o resultado será

$c<d$ ou $d>c$ pois de $4<7$ deduz-se que $7>4$. De qualquer modo dentro da abertura do sinal fica a quantidade maior.

Para indicar-se a desigualdade de duas quantidades, sem importar qual a maior ou a menor, escreve-se $a \neq b$ e lê-se *a diferente de b*.

Exercícios sôbre os símbolos algébricos

20. Nos exercícios abaixo daremos às letras *a, b, c* e *d* os seguintes valores:

$$a=2, \quad b=3, \quad c=4, \quad d=6$$

Problema. Qual é o valor $a+4b-2c$?

Solução. $a=2$; $4b=4\times3=12$; e $2c=2\times4=8$. Então o valor de $a+4b-2c$ é $2+12-8=6$.

Operação
$a+4b-c$
$2+12-8=6$

Achar o valor das seguintes expressões:

1. $3a+b+c$.	Resp. 13		5. $2d+c-5a$.	Resp. ?
2. $4a+2b+c$.	» 18		6. $8+c-2b$.	» ?
3. $a+3b+d$.	» 17		7. $3a+3b+3c$.	» ?
4. $c+20-d$.	» 18		8. $2c-d+15$.	» ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+bc+2d$?

Solução. $a=2$; $bc=3\times4=12$, e $2d=2\times6=12$. Então o valor de $a+bc+2d$ é $2+12+12=26$.

Operação
$a+bc+2d$
$2+12+12=26$

Achar o valor das seguintes expressões:

9. $2ab+5c-d$.	Resp. 26	13. $ac+d-a$	Resp. ?
10. $5bc+d-2ab$.	» 54	14. $bd+c-d$.	» ?
11. $ab+bc+cd$.	» 42	15. $ab+bc-ac$.	» ?
12. $b+2ab-c$.	» 11	16 $2cd+5ab$.	» ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+2b+\frac{d}{b}$?

Solução. $a=2$; $2b=2\times3=6$, e $\frac{d}{b}=\frac{6}{3}=2$. O valor desta expressão é $2+6+2=10$.

Operação
$a+2b+\frac{d}{b}$
$2+6+2=10$

Achar o valor das seguintes expressões:

17. $a+\frac{d}{a}+d$.	Resp. 11	21. $ab+c+\frac{6}{3}$.	Resp. ?
18. $2b+\frac{d}{b}-a$.	» 6	22. $dc-a+\frac{d}{c}$.	» ?
19. $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}+6$.	» 10	23. $\frac{d}{c}+\frac{d}{a}+\frac{c}{a}$.	» ?
20. $ad+ab+\frac{d}{a}$.	» 21	24. $a+\frac{ad}{c}$.	» ?

Nota. É necessário que o discípulo compreenda que as letras *a, b, c* e *d* não representam respectivamente só os valores, 2, 3, 4 e 6, elas podem representar qualquer valor segundo os dados de um problema.

Definições de alguns termos algébricos

21. Coeficiente é um número prefixo a uma quantidade representada por letras para mostrar quantas vezes essa quantidade deve ser tomada. Assim, em $4x$, o coeficiente é 4, e mostra que a letra x deve ser tomada quatro vezes que são $x+x+x+x=4x$.

22. O coeficiente pode ser um número ou uma letra; se é um número, chama-se **coeficiente numérico;** se é uma letra, chama-se **coeficiente literal.** Assim, na quantidade ay, a letra a é o coeficiente de y, porque mostra que y tem de ser tomado a vezes. Se a fôr igual a 5, então y será tomado 5 vezes.

O coeficiente numérico escreve-se sempre antes das letras que representam uma quantidade, como $8xy$, $16abcx$, etc.

23. Quando nenhum coeficiente numérico estiver prefixo a uma quantidade algébrica, subentende-se sempre o coeficiente 1; pois x é o mesmo que $1x$; bcx é o mesmo que $1bcx$.

24. Potência de uma quantidade é o produto dessa quantidade multiplicada por si mesma, uma ou mais vezes.

Quando uma quantidade é tomada duas vezes como fator, o produto chama-se **quadrado ou segunda potência** dessa quantidade; quando é tomada três vezes como fator, o produto chama-se **cubo** ou **terceira potência;** quando é tomada quatro vezes como fator, chama-se **quarta potência,** etc. Assim,

A segunda potência de 2 é 4, porque $2\times2=4$.
A terceira potência de 2 é 8, porque $2\times2\times2=8$.
A segunda potência de a é aa, porque $a\times a=aa$.
A terceira potência de a é aaa, porque $a\times a\times a=aaa$.
A quarta potência de a é $aaaa$, porque $a\times a\times a\times a=aaaa$.

25. Expoente é o número escrito no alto direito de uma quantidade para mostrar a que grau de potência ela deve ser elevada, ou quantas vezes deve ser tomada como fator.

Em lugar de repetirmos muitas vezes a mesma letra,

para exprimir o grau de uma potência, empregamos, por abreviatura, um expoente para êsse fim. Assim,

$2\times2=2^2$.	$a\times a=aa=a^2$.
$2\times2\times2=2^3$.	$a\times a\times a=aaa=a^3$.
$2\times2\times2\times2=2^4$.	$a\times a\times a\times a=aaaa=a^4$.
$2\times2\times2\times2\times2=2^5$.	$a\times a\times a\times a\times a=aaaaa=a^5$.

Os algarismos 2, 3, 4 e 5, escritos no alto direito do algarismo 2 e da letra a, são os seus expoentes.

26. Os símbolos que representam as potências lêem-se do seguinte modo:

x^4 lê-se: x elevado à quarta potência, ou a quarta potência de x.
x^m lê-se: x elevado à potência m.
x^0 lê-se: x elevado à potência zero.

Observação. É necessário que o discípulo compreenda perfeitamente a diferença entre **coeficiente** e **expoente**. Em $3x$, 3 é coeficiente, e mostra que x deve ser tomado 3 vezes como parcela. Em x^3, 3 é expoente, e mostra que x deve ser tomado 3 vezes como fator em uma multiplicação.

Dando-se a x o valor de 5, podemos facilmente notar a diferença numérica destas duas expressões:

$$3x=x+x+x=5+5+5=15.$$
$$x^3=x\times x\times x=5\times5\times5=125.$$

27. Raiz de uma quantidade é o fator que multiplicado por si uma ou mais vezes produz essa quantidade.

A raiz chama-se **quadrada,** quando é tomada duas vezes como fator; chama-se **cúbica,** quando é tomada três vezes como fator; chama-se **quarta raiz,** quando é tomada quatro vezes como fator, e assim por diante. De sorte que,

A raiz quadrada	de 25	é 5, porque	$5\times5=25$.
A raiz cúbica	de 125	é 5, porque	$5\times5\times5=125$.
A raiz quadrada	de a^2	é a, porque	$a\times a=a^2$.
A raiz cúbica	de a^3	é a, porque	$a\times a\times a=a^3$.
A quarta raiz	de a^4	é a, porque	$a\times a\times a\times a=a^4$.

Nestes exemplos vê-se que 5 é a raiz quadrada de 25, e a raiz cúbica de 125; a é a raiz quadrada de a^2, a raiz cúbica de a^3, e a quarta raiz de a^4, etc.

28. Radical é a figura $\sqrt{}$, que se escreve sôbre uma quantidade para mostrar que se deve extraír dela a raiz indicada pelo índice.

29. Indice do radical é o número que, escrito na abertura do ângulo do sinal radical, mostra o grau da raiz que deve ser extraída. Assim,

$\sqrt[2]{9}$ lê-se: a raiz quadrada de 9.
$\sqrt[3]{27}$ lê-se: a raiz cúbica de 27.
$\sqrt[2]{a}$ lê-se: a raiz quadrada de a.
$\sqrt[3]{xy}$ lê-se: a raiz cúbica de xy.
$\sqrt[4]{abc}$ lê-se: a quarta raiz de abc.

Os números 2, 3 e 4, escritos nos ângulos dos sinais radicais, são os índices das raizes.

Nota. Na raiz quadrada, suprime-se o índice 2, e escreve-se simplesmente o sinal radical; assim $\sqrt{ax}$ lê-se: raiz quadrada de ax.

O sinal $\sqrt{}$ é uma das formas antigas da letra r, inicial da palavra raiz.

Exercícios sôbre os símbolos das potências

30. Nos exercícios abaixo daremos a x o valor 2; a y, o valor 3, e a z, o valor 4.

Problema. Qual é o valor de x^2+y^3?

Solução. Se $x=2$, então $x^2=2\times2=4$. Se $y=3$, então $y^3=3\times3\times3=27$. O valor da soma das duas potências é $4+27=31$.

Operação

$$x^2=x\times x\quad=2\times2\quad=4$$
$$y^3=y\times y\times y=3\times3\times3=27$$
$$x^2+y^3=31$$

Achar o valor numérico das seguintes expressões:

1.	x^3+y^2.	Resp. 17	6.	$x\ +2y+z^2$.	Resp. ?
2.	x^2+y^3-z.	» 27	7.	$3x^2+5y+z^2$.	» ?
3.	x^3-y+z^2.	» 21	8.	$y^3\ +z^2\ -5x$.	» ?
4.	$x+y^2+2z^2$.	» 43	9.	$2z^5+y\ +x$.	» ?
5.	$x^4-y\ -z$.	» 9	10.	$z\ +y^2+z^3$.	» ?

Expressões algébricas

31. Chama-se **expressão algébrica** uma quantidade representada por meio de símbolos algébricos. Assim, $5a$ é uma expressão algébrica que mostra que a quantidade a deve ser tomada 5 vezes.

$2a+3b$ é uma expressão algébrica que mostra que 3 vezes a quantidade b, deve ser adicionada a 2 vezes a quantidade a.

$3a^2—5ab$ é uma expressão algébrica que mostra que de 3 vezes o quadrado de a, deve subtrair-se 5 vezes a quantidade ab.

32. Monômio é uma quantidade algébrica que não está unida a outra quantidade pelos sinais de somar ou subtrair. Assim, $3a$, $2xy$ e abx^2y são monômios.

O monômio é também chamado **termo algébrico.**

33. Polinômio é uma quantidade algébrica composta de dois ou mais termos unidos pelos sinais + ou —. Assim, $a+b$, $ab—2x+5y^2$ são polinômios.

Se um polinômio tem dois termos, chama-se também **binômio;** se tem três termos, chama-se também **trinômio.** Assim, $2a+b$ é binômio; e $ab—x+y$ é um trinômio.

34. Cada termo de um polinômio deve ser precedido por um dos sinais + ou —, exceptua-se, porém, o primeiro termo que, quando é positivo, suprime-se-lhe, por abreviatura, o sinal +, como $3ax+2bc—xy$.

35. Se um termo, precedido pelos sinais + ou — é combinado com outras letras pelo sinais × ou ÷, estas letras fazem parte dêsse termo, e a êle devem ser unidas pela operação indicada. Assim, $4+3\times6$ quer dizer que ao número 4 devemos juntar, não 3 sòmente, mas o produto de 3 multiplicado por 6, que é $3\times6=18$; e por isso esta expressão tem só dois termos que são 4 e 18. Do mesmo modo $a+b\times c$ tem só dois termos que são a e bc; $x+a—b\div c$ tem só três termos que são x, a, e $—\frac{b}{c}$.

Os discípulos reduzirão as seguintes expressões aos seus verdadeiros termos:

1. $50+5\times2$.	$50+10$	7. $4a\div2b+c$.	?
2. $20—3\times2$.	$20—6$	8. $50\div6+ab$	?
3. $ac+4b\times2$.	$ac+8b$	9. $b—c\times d$.	?
4. $5b—6b\div3$.	$5b-\frac{6b}{3}$	10. $ab—5c+d\times x$.	?
5. $3x—8y\div a$.	$3x-\frac{8y}{a}$	11. $x\times y\times z+ab$.	?
6. $6b+7c\times x$.	$6b+7cx$	12. $25—16ab\div2$.	?

36. Mudando-se em um polinômio a ordem de seus termos, não se altera o seu valor, conservando cada termo o seu respectivo sinal. Assim, a expressão $a+b—c$ é igual a $a—c+b$ ou a $b+a—c$.

Ilustração. Se dermos à letra a o valor numérico 5; a b, o valor 4, e a c o valor 3, teremos nas três expressões resultados iguais, como vemos nas igualdades que estão ao lado.

$a+b—c=5+4—3=6$.
$a—c+b=5—3+4=6$.
$b+a—c=4+5—3=6$.

37. Quando uma letra não tem expoente, subentende-se sempre o expoente 1; pois a é o mesmo que a^1; x é o mesmo que x^1, e axy^2 é o mesmo que $a^1x^1y^2$.

38. Chama-se **grau** de um termo à soma dos expoentes das letras que constituem êsse termo.

$2a$ é um termo do primeiro grau, porque tem uma só letra, que é a, com o expoente 1.

ax é um termo do segundo grau, porque tem duas letras, que são a e x, cada uma elevada à primeira potência.

$5axy$ é um termo do terceiro grau.

a^2b^2 é um termo do quarto grau. (n. **25**).

39. Polinômio homogêneo é o que tem todos os seus termos com o mesmo grau. Assim, x^3+2xy^2+axy é um polinômio homogêneo, porque todos os seus termos são do terceiro grau.

40. Termos semelhantes são os que se compõem das mesmas letras elevadas aos mesmos expoentes. Assim, $2abc^2$, $3abc^2$ e $—abc^2$ são termos semelhantes.

41. Um polinômio que tem termos semelhantes, pode ser **reduzido,** isto é, pode ser reduzido o número dos seus termos, porque dois ou mais termos semelhantes podem ser reduzidos a um só.

Assim, o polinômio $5ab+2x+4x$ pode ser reduzido a dois termos, que são $5ab+6x$, porque $2x+4x=6x$.

O polinômio $3ac+2ac+6ab—2ab$ pode também ser reduzido a dois termos que são $5ac+4ab$, porque $3ac+2ac=5ac$, e $6ab—2ab=4ab$. Esta redução é um dos casos da adição algébrica, da qual adiante trataremos.

42. Inverso de uma quantidade é o quociente da unidade dividida por essa quantidade. Assim, de 3 é $\frac{1}{3}$; de ab é $\frac{1}{ab}$ o inverso de $a+x$ é $\frac{1}{a+x}$, etc.

Modo de enunciar as expressões algébricas

43. Qualquer expressão algébrica pode ser facilmente enunciada com clareza, por meio de palavras. Assim, $ac+bd$ lê-se: «o produto de ac mais o quociente de b por d» ou simplesmente: «ac mais b dividido por d»; ou ainda ac mais b sôbre d; $a^2+2ab+b^2$ lê-se: «a dois mais $2ab$ mais b dois.»

44. Quando duas ou mais quantidades teem um divisor comum, ou estão incluídas debaixo de um sinal radical, ligam-se todas com a conjunção e. Assim, $a+\frac{b}{c}$ lê-se: «a mais b dividido por c». $\frac{a+b}{c}$ lê-se: «a soma de a mais b dividida por c, ou a e mais b dividido por c».

Se omitirmos a conjunção *e*, enunciaremos a expressão antecedente. $\frac{2xy}{\sqrt{a-b}}$ lê-se: «$2xy$ dividido pela (ou sobre) raiz quadrada de a e menos b»; Se omitirmos a conjunção, o divisor será $\sqrt{a-b}$.

Ler as seguintes expressões algébricas:

1. $bx-3ay^2$.
2. $a^2bc-2abc+6x$.
3. $\frac{a+c}{c}+\frac{abc}{20}$.
4. $4a^2b^3c^4-\frac{4a-2b}{xy}$
5. $18xy^3 \div \sqrt{a^2-b^3}$
6. $\frac{18+ab}{x+y}+\frac{a^2+b}{\sqrt{x-y}}$

ADIÇÃO

45. Adição em Álgebra é a operação que tem por fim reunir duas ou mais quantidades algébricas em uma só expressão, chamada soma.

46. Na adição algébrica ha três casos a considerar que são:

1.° Quando os termos são semelhantes e teem o mesmo sinal.

2.° Quando os termos são semelhantes, mas teem sinais contrários.

3.° Quando todas as quantidades não são semelhantes.

Nota. Para evitar dificuldades, o discípulo recordará os dois pontos seguintes:

1.° As quantidades que não tiverem sinal prefixo, são consideradas positivas, isto é, com o sinal + (n.° **11**).

2.° As quantidades que não tiverem coeficiente, subentende-se o coeficiente 1; assim, ab quer dizer $1ab$. (n.° **23**).

Primeiro caso de adição

47. Quando as quantidades são semelhantes, e teem o mesmo sinal, adicionam-se os coeficientes, e à soma junta-se a parte literal com o sinal das parcelas. Neste caso procede-se justamente como em Aritmética.

Problema. Qual é a soma das quantidades 3 anos, 5 anos, 4 anos e 1 ano?

Solução. Somando as quatro quantidades 3+5+4+1, temos 13, isto é, 13 anos.

Substituindo agora a palavra anos pela letra a, é evidente que a soma será $13a$. Se as quatro quantidades, em lugar do sinal + subentendido, tivessem o sinal —, a soma seria — $13a$, porque a soma deve exprimir o resultado de todas as suas parcelas.

3 anos,	$3a$
5 anos,	$5a$
4 anos,	$4a$
1 ano,	a
13 anos,	$13a$

Operar as seguintes adições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
$+5$	-4	$2a$	$2b$	$4ab$	$2x-5$
$+3$	-3	$3a$	$6b$	$8ab$	$5x-3$
$+4$	-5	$5a$	$4b$	ab	$x-8$
$+2$	-4	$8a$	$5b$	$6ab$	$4x-2$
$+14$	-16	$18a$	$17b$	$19ab$	$12x-18$

(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
$3ac$	$-2bx$	$5abx^2$	$7a+8$	$8x-5$	$2a-b$
$15ac$	$-3bx$	$3abx^2$	$5a+3$	$6x-3$	$5a-2b$
$9ac$	$-bx$	$2abx^2$	$a+4$	$2x-6$	$a-5b$
$6ac$	$-4bx$	abx^2	$2a+1$	$3x-4$	$3a-2b$
$2ac$	$-6bx$	$4abx^2$	$4a+6$	$x-2$	$5a-4b$

48. Uma soma algébrica não é sempre comparável a uma soma em Aritmética, como no caso precedente.

Em Aritmética, como as quantidades que se adicionam são sempre positivas, a soma deve ser sempre maior do que qualquer das suas parcelas; assim, na operação 3+4+8=15, a soma 15 é maior do que qualquer das parcelas 3, 4 ou 8. Em Álgebra, porém, como temos de adicionar também quan-

tidades negativas, a soma poderá ser algumas vezes nula ou numèricamente inferior à soma das quantidades positivas, como vamos ver no

Segundo caso da adição

49. Quando as quantidades são semelhantes, mas teem sinais contrários, isto é, quando umas teem o sinal +, e outras teem o sinal —, adicionam-se os coeficientes dos termos positivos; depois adicionam-se os coeficientes dos termos negtivos; acha-se a diferença das duas somas, e, se a soma maior fôr positiva, dá-se à diferença o sinal +, e, se a soma maior fôr negativa dá-se à diferença o sinal —, e junta-se-lhe a parte literal.

Problema. Achar a soma das seguintes quantidades: $+3a$, $+5a$, $-4a$, $+6a$ e $-2a$.

Solução. A soma das quantidades positivas é $14a$; a soma das quantidades negativas é $6a$; a diferença das duas somas é $14a-6a=8a$. Ora, como a soma maior é a positiva, dá-se à diferença o sinal + e ficará $+8a$ que é a soma das cinco parcelas.

$$\begin{array}{r} +3a \\ +5a \\ -4a \\ +6a \\ -2a \\ \hline +8a \end{array} \qquad \begin{array}{l} +3a-4a \\ +5a-2a \\ +6a \\ \hline +14a-6a=8a \end{array}$$

Demonstração. Para compreendermos êste caso, figuremos um cofre onde guardamos dinheiro. As quantias que recolhemos no cofre são positivas, as que tiramos são negativas, e a soma de todas mostra o que existe no cofre. Ora, como cada quantia negativa anula uma quantia positiva semelhante de igual valor, segue-se que, se a soma das quantias negativas fosse igual à das positivas, o resultado da adição seria nulo ou zero; mas, como no caso presente a soma das quantidades negativas é só $6a$, anula $6a$ em $14a$, e o resultado da adição é $8a$. Portanto, a soma destas cinco quantidades é $+8a$.

50. Este caso da adição é uma simples redução de termos semelhantes; **(n.º 41)**, pois, se escrevermos todos os termos desta adição em forma de um polinômio, e efetuarmos a redução, o resultado será o mesmo, como $3a+5a-4a+6a-2a=8a$. Portanto, não é rigorosamente necessário escrever os termos algébricos em coluna para se efetuar a adição; podemos também chegar ao mesmo resultado, reduzindo os termos quando êles estão em forma de um polinômio. A coluna tem a vantagem de tornar mais inteligível e claro o ensino desta operação.

51. Para completarmos êste caso, vamos operar uma adição, na qual a soma será uma quantidade negativa.

Problema. Somar os seguintes termos: $+5a$, $+3a$ $-10a$, $+2a$ e $-6a$.

Solução. A soma dos termos positivos é $10a$; a soma dos termos negativos é $16a$, e a diferença entre as duas somas é $6a$. Ora, como a soma maior é negativa, a diferença é também negativa, e por isso a soma é $-6a$.

$$\begin{array}{r} +5a \\ +3a \\ -10a \\ +2a \\ -6a \\ \hline -6a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -10a \\ -6a \\ \hline -16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +5a \\ +3a \\ +2a \\ \hline +10a=-6a \end{array}$$

Demonstração. Para compreendermos êste processo, figuremos ainda um cofre onde guardamos o nosso dinheiro, e depositamos também o dinheiro de uma pessoa, que deposita e retira diversas quantias. As quantias que ela deposita são positivas, e as que retira, são negativas. Ela entrou com $5a+3a+2a=10a$, e retirou $10a+6a=16a$; se ela tivesse retirado sòmente $10a$, o resultado seria nulo ou zero, porque em nada alteraria os fundos que tínhamos no cofre; mas como ela tirou $16a$, isto é, $6a$ mais do que pôs, o resultado será $-6a$, isto é, ficará um desfalque de $6a$. Portanto, a soma de $+5a+3a-10a+2a-6a=-6a$.

Operar as seguintes adições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
-2	$+8$	$+3a$	$+5abx$	$ab+8$
$+7$	-4	$+10a$	$-3abx$	$3ab+1$
-3	$+9$	$-12a$	$-abx$	$-2ab+5$
$+4$	-7	$-6a$	$-5abx$	$9ab-15$
-1	-6	$+2a$	$+2abx$	$-3ab-7$
$+5$	0	$-3a$	$-2abx$	$8ab-8$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$6ab$	$-bxy$	$3ab-6$	$a+b$	$a+b-2c$
$-2ab$	$-7bxy$	$-2ab+7$	$-a+b$	$-a+2b-3c$
$-ab$	$-8bxy$	$-6ab-2$	$3a-2b$	$-3a-b+5c$
$5ab$	bxy	$-5ab-1$	$-a+3b$	$-a+3b-c$

11. Qual é a soma de $8a$ e $-5a$? Resp. $3a$.
12. Qual é a soma de $5a$ e $-8a$? » $-3a$.
13. Qual é a soma de $-7ax$, $3ax$, $6ax$, e $-ax$ » ax.
14. Qual é a soma de $4xy$, $2xy$, e $-6xy$? » 0.
15. Adicionar $4ac$, $3ac$, $7ac$, $-6ac$, $-2ac$, $9ac$, e $-17ac$. Resp. $-2ac$.

16. Adicionar $7a-5b$, $2a+3b$, $-7a-8b$ e $-a+9b$.
Resp. $a-b$.

17. Achar a soma de $8ax-2by$, $-2ax+3by$, $3ax-4by$ e $-9ax+8by$.
Resp. $5by$.

18. Achar a soma de $3ab-10x$, $-3ab+7x$, $3ab-6x$, $-ab+2x$ e $-2ab+7x$.
Resp. 0.

Terceiro caso de adição

52. Quando alguns dos termos não são semelhantes, escrevem-se em coluna os termos semelhantes, e os dessemelhantes escrevem-se adiante, e depois procede-se como nos dois casos precedentes.

Problema. Quanto somam 2 centos, mais 3 centos e mais 4 dúzias?

Solução. Como 2 centos e 3 centos são quantidades semelhantes, escrevem-se em coluna para facilitar a soma; como 4 dúzias é uma quantidade dessemelhante, escreve-se adiante; a soma das três quantidades é 5 centos e 4 dúzias.

$$\begin{array}{l} 2\ centos \\ 3\ centos+4\ duzias \\ \hline 5\ centos+4\ duzias \end{array}$$

Se em lugar de escrevermos as palavras centos e dúzias, escrevermos c e d, o resultado será o mesmo, pois $2c+3c+4d=5c+4d$.

$$\begin{array}{r} 2c \\ 3c+4d \\ \hline 5c+4d \end{array}$$

Regra geral para a adição. *Escrevem-se os termos semelhantes em colunas, e adiante dêles, os termos dessemelhantes com os seus respectivos sinais; adicionam-se os termos semelhantes que forem positivos, depois os que forem negativos, e a diferença das duas somas escreve-se debaixo da coluna respectiva com o sinal da soma maior e com a parte literal, e acrescentam-se os termos dessemelhantes com os seus respectivos sinais.*

Operar as seguintes adições:

(1.)
$$\begin{array}{r} 4a+5b-7c \\ 3a-\ b+2c \\ 9a-2b-\ c \\ -a+3b+4c \\ \hline 15a+5b-2c \end{array}$$

(2.)
$$\begin{array}{r} 3b+4x-\ y^2 \\ 5b+7x+3y^2 \\ b-6x+4y^2 \\ -4b+9x-8y^2 \\ \hline \end{array}$$

(3.)
$$\begin{array}{r} 5a+\ xy+\ m \\ 9a-5xy+7m \\ -6a+8xy-8m \\ 7a-9xy+9m \\ \hline \end{array}$$

(4.)
$$\begin{array}{r} 7x-9y+5z+3-\ g \\ -\ x-3y\ \ \ \ \ -8-\ g \\ -\ x+\ y-3z+1+7g \\ -2x+6y+3z-1-\ g \\ \hline \end{array}$$

(5.)
$$\begin{array}{r} 8a+\ b\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ 2a-\ b+c\ \ \ \ \ \\ -3a+\ b\ \ \ \ \ \ +2d \\ -6b-3c+3d \\ \hline \end{array}$$

6. $6a+4c+3b-2a-3c-5b$.
Resp. $4a-2b+c$.

7. $2ab+c$, $4ax-2c$, $12-2ax$, $6ab+3c-x$.
Resp. $8ab+2ax+2c+12-x$.

8. $14a+x$, $13b-y$, $-11a+2y$, $-2a-12b+z$.
Resp. $a+b+x+y+z$.

9. $-7b+3c$, $4b-2c+3x$, $3b-3c$, $2c-2x$.
Resp. x.

10. $a-3b+4c-5d$, $3b-5c+6d-2a$, $5c-7d+4a-3b$, $7d-5a+6b-3c$.
Resp. $-2a+3b+c+d$.

11. x^3-5x^2+6x-2, $3x^3-6x^2-15x+4$, x^3-8x^2-6x+4.
Resp. $5x^3-19x^2-15x+6$.

12. $8ax-3cz^2$, $-5ax+5cz^2$, $ax+2cz^2$, $-4ax-4cz^2$.
Resp. 0.

13. Qual é a soma de $3(a+b)$, $7(a+b)$ e $5(a+b)$?

Solução. As quantidades que estão enfeixadas em um parêntesis, são consideradas como um só fator. É evidente que 3 vezes, mais 7 vezes, mais 5 vezes uma quantidade são iguais a 15 vezes essa quantidade.

$$\begin{array}{r} 3(a+b) \\ 7(a+b) \\ 5(a+b) \\ \hline 15(a+b) \end{array}$$

14. Somar $13(a+b)+15(a+b)-7(a+b)$.
Resp. $21(a+b)$.

15. Achar a soma de $8c(x-y)$, $7c(x-y)$, $-5c(x-y)$, e $9c(x-y)$.
Resp. $19c(x-y)$.

16. Achar a soma de $3a(b+x)$, $5a(b+x)$, $7a(b+x)$ e $-14a(b+x)$.
Resp. $a(b+x)$.

SUBTRAÇÃO

53. Subtração em Álgebra é a operação que tem por fim achar a diferença entre duas expressões algébricas.

A quantidade da qual se tem de fazer a subtração, chama-se **minuendo;** a quantidade que se tem de subtrair, chama-se **subtraendo,** e o resultado da operação, chama-se **diferença algébrica.**

Em Álgebra, bem como em Aritmética, a soma do subtraendo e da diferença é igual ao minuendo.

Nota. Em Aritmética, como se opera só com quantidades positivas, a ideia da subtração é sempre diminuição; em Álgebra, porém, a diferença

entre duas quantidades pode ser numèricamente maior do que elas; assim, sendo $+a$ o minuendo, e $-a$ o subtraendo, a diferença entre $+a$ e $-a$ é $2a$.

Há um modo muito simples de operar todos os casos da subtração sem dificuldade alguma. Esse modo é *trocar o sinal de todos os termos do subtraendo, e depois somar o minuendo e o subtraendo;* e assim qualquer caso da subtração ficará reduzido a uma simples adição algébrica.

Não é, porém, conveniente empregarmos esta regra sem primeiro compreendermos a análise de cada caso da subtração, do contrário não poderemos ter uma idéia exata desta operação algébrica.

Primeiro caso da subtração

54. Quando os dois termos de uma subtração são semelhantes e teem o mesmo sinal, acha-se a diferença entre os coeficientes e escreve-se em baixo com a parte literal e o sinal comum.

Problema. Qual é a diferença entre $7ab$ e $4ab$?

Solução. Se de 7 laranjas tirarmos 4 laranjas restarão 3 laranjas; então é evidente que de $7ab$ subtraindo $4ab$, restam $3ab$. A diferença, pois entre $7ab$ e $4ab$ é $3ab$. Este caso é igual à subtração em Aritmética.

Minuendo	$7ab$
Subtraendo	$4ab$
Diferença	$3ab$

Operar as seguintes subtrações:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
10	-9	$5ac$	$-8abc^2$	$3a+8$
8	-2	ac	$-8abc^2$	$2a+7$
2	-7	$4ac$	0	$a+1$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$18ab$	$30axy$	$-95y$	$3bx$	$18d-11$
$17ab$	$12axy$	$-81y$	$3bx$	$9d-9$

Segundo caso da subtração

55. Em Álgebra podemos também subtrair uma quantidade numèricamente maior, de outra menor, e se o sinal fôr o mesmo, o resultado será a diferença das duas quantidades com o sinal contrário.

Problema. Subtraindo $8a$ de $6a$ quanto resta?

Solução. Subtraindo $6a$ de $6a$, restam 0 ou nada; subtraindo-se $7a$ de $6a$, resta $-a$, e subtraindo $8a$ de $6a$, restam $-2a$.

	Subtração	Adição
Minuendo	$+6a$	$+6a$
Subtraendo	$+8a$	$-8a$
Resto	$-2a$	$-2a$

Demonstração. Para compreendermos a análise desta solução, figuremos que um homem, levando só 6$000, foi a uma loja, e alí comprou 8$ de objetos; ora, se êle tivesse despendido só 6$000, voltaria da loja sem dinheiro algum; mas como gastou 8$000, voltou com uma dívida de 2$000, que ainda tem de pagar. Logo, 6$—8$=—2$. Trocando o cifrão pela letra a, temos $6a-8a=-2a$.

Se mudarmos o sinal do subtraendo, e operarmos a adição algébrica, o resultado será o mesmo, como vemos na operação acima.

Operar as seguintes subtrações:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
12	$-15a$	$25ax$	$-29ay$	$18x+23$
13	$-18a$	$36ax$	$-30ay$	$20x+25$
-1	$+3a$	$-11ax$	$+ay$	$-2x-2$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
33	$-26a$	$42bx$	$-17ay$	$24x+13$
44	$-36a$	$49bx$	$-18ay$	$22x+15$

Terceiro caso da subtração

56. Quando os termos de uma subtração não são semelhantes, exprime-se a sua diferença escrevendo as duas quantidades separadas pelo sinal —.

Problema. Da quantidade a subtrair a quantidade b.

Solução. Desde que não sabemos o número das unidades representadas pela quantidade a, nem pela quantidade b, é claro que só podemos indicar a sua diferença pela expressão $a-b$.

Os dois termos desta subtração são ambos positivos; se porém trocarmos o sinal do subtraendo pondo —, e depois operarmos a adição algébrica, o resultado será também $a-b$.

Subtração	Adição
a	$+a$
b	$-b$
$a-b$	$a-b$

Operar as seguintes subtrações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Minuendo	x	a	$2ab$	$a+b$	$2a-5$
Subtraendo	y	8	$3xy$	c	y
Diferença	$x-y$	$a-8$	$2ab-3xy$	$a+b-c$	$2a-5-y$

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)
$18y$	$4b+x$	$ab-9$	$a+b+c$	$25+x^2$	$3x^2+20$
$17x$	$3y$	xy	d	$18a$	$5a$

Quarto caso da subtração

57. Quando de um termo positivo se subtrair um negativo semelhante, o resultado será igual à soma dos dois.

Tomando, por exemplo, o número 10, e subtraindo dêle os números 2, 1, 0, — 1, — 2, etc. teremos

Minuendo	10	10	10	10	10
Subtraendo	2	1	0	—1	—2
Resto	8	9	10	11	12

Subtraindo 2 de 10 resta 8, subtraindo 1 resta 9; subtraindo 0 resta 10; subtraindo — 1 resta 11; subtraindo — 2 resta 12, porque o subtraendo negativo aumenta o valor do minuendo.

58. Para compreendermos melhor êste resultado vamos resolver o seguinte problema:

Problema. Em certo dia o termômetro marcou 3 graus de calor, e no dia seguinte marcou 2 graus abaixo de zero; qual foi a diferença de temperatura nestes dois dias?

Solução. Os graus acima de zero são positivos, e os graus abaixo de zero são negativos. Ora, é evidente que para achar a diferença de calor entre + 3 graus e — 2 graus é necessário somar os números 3 e 2, que fazem 5. Por isso, a diferença entre + 3g, e — 2g, é igual a + 5g.

$$\begin{array}{r} +3 \text{ g.} \\ -2 \text{ g.} \\ \hline +5 \text{ g.} \end{array}$$

+	3
+	2
+	1
ZERO	
—	1
—	2

59. Para êste caso ficar perfeitamente claro, vamos resolver mais o seguinte problema:

Problema. De a subtraindo $b-c$, quanto resta?

Solução. Si subtrairmos b de a, o resultado será $a-b$, como vimos no 3.º caso. O subtraendo, porém, não é b e sim $b-c$, que é uma quantidade c unidades menor do que b.

Subtração	Adição
a	a
$b-c$	$-b+c$
$a-b+c$	$a-b+c$

Quer isto dizer que, subtraindo b, nós subtraímos c unidades a mais do que devíamos; logo, para obter o verdadeiro resultado devemos juntar c à diferença $a-b$. O verdadeiro resultado é, então, $a-b+c$ ou $a+c-b$.

Ora, si trocássemos os sinais do subtraendo e operássemos a soma algébrica, o resultado seria o mesmo.

Demonstração. Por meio de números podemos compreender fàcilmente êste resultado. Seja subtrair 5—3 de 9. Si subtrairmos 5 de 9, o resultado será 9—5=4. O subtraendo, porém, não é 5 e sim 5—3, que é uma quantidade menor 3 unidades do que 5. Logo, para obter o verdadeiro resultado, devemos juntar 3 à diferença 9—5. Virá, então, 9—5+3 ou 9+3—5=7.

$$\begin{array}{l} a \\ b-c \\ \hline a-b+c \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9 \\ 5-3 \\ \hline =9-5+3 \end{array}$$

Todos os casos da subtração algébrica são resolvidos fàcilmente pela seguinte regra geral:

Regra geral da subtração. *Escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, de sorte que os termos semelhantes fiquem uns debaixo dos outros.*

Consideram-se todos os termos do subtraendo com o sinal trocado: o que tiver o sinal +, ficará com o sinal —, e o que tiver o sinal —, ficará com o sinal +.

Adicionam-se depois o minuendo e o subtraendo segundo a regra da adição algébrica, e o resultado será o resto da subtração.

Nota. A regra ficará perfeitamente compreendida, operando o seguinte exemplo por subtração e depois por adição, trocando os sinais do subtraendo, conforme está preceituado na regra:

	Subtração	Adição
Minuendo	$5a+3b-c$	$5a+3b-c$
Subtraendo	$2a-2b-3c$	$-2a+2b+3c$
Diferença	$3a+5b+2c$	$3a+5b+2c$

Operar as seguintes subtrações:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$8-5$	$3ax-2y$	$4cx^2-3by^2$	$8xy+3az-8$
$-2+3$	$2ax+3y$	$2cx^2+3by^2$	$5xy-3az+8$
$10-8$	$ax-5y$	$2cx^2$	$3xy+6az-16$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
$7x+4y$	$3a-2b$	$6ax-4y^2+3$	$5a+2x-2y-z$
$6x+\ y$	$3a-3b$	$3ax-6y^2+2$	$2a+\ x-4y-z$

9. De 14 subtrair $ab-5$. Resp. $19-ab$.
10. De $a+b$ subtrair a. » b.
11. De a subtrair $a+b$. » $-b$.
12. De x subtrair $x-5$. » 5.
13. De $3ax$ subtrair $2ax+7$. » $ax-7$.
14. De $x+y$ subtrair $x-y$. » $2y$.
15. De $x-y$ subtrair $y+x$. » $-2y$.
16. De $x-y$ subtrair $y-x$. » $2x-2y$.
17. De $x+y+z$ subtrair $x-y-z$. » $2y+2z$.
18. De $5x+3y-z$ subtrair $4x+3y+z$. » $x-2z$.
19. De a subtrair $-a$. » $2a$.
20. De $8a$ subtrair $-3a$. » $11a$.
21. De $5b$ subtrair $+11b$. » $-6b$.
22. De $3a$ subtrair $-2b$. » $3a+2b$.
23. De $-9a$ subtrair $3a$. » $-12a$.
24. De $-7a$ subtrair $-7a$. » 0.
25. De $-19a$ subtrair $-2a$. » $-17a$.
26. De -9 subtrair -16. » 7.
27. De 12 subtrair -8. » 20.
28. De -14 subtrair -5. Resp. -9.
29. De $3a-2b+6$ subtrair $2a-7b-3$. » $a+5b+9$.
30. De $32a+3b$ subtrair $5a+17b$. » $27a-14b$.
31. De $5(x+y)$ subtrair $2(x+y)$. » $3(x+y)$.
32. De $3a(x-z)$ subtrair $a(x-z)$ » $2a(x-z)$.
33. De $13a-2b+9c-3d$ subtrair $8a-6b+9c-10d$. » $5a+4b+7d$.

Aplicação do parêntesis na adição e na subtração

60. Pelo que acabamos de expôr nas operações da adição e subtração, fica evidente que os sinais $+$ e $-$ teem duas significações muito distintas, que são:

1.ª *Indicar simplesmente as operações de adição e subtração.*

2.ª *Mostrar a natureza positiva ou negativa das quantidades.*

61. Se subtrairmos a quantidade b da quantidade a, o resultado será $a-b$; neste exemplo, o sinal — simplesmente indica a operação de subtrair; pois, está subentendido que os dois termos da subtração são positivos, porque a expressão completa seria $(+a)-(+b)$.

Se, porém, do termo positivo a subtraíssemos o termo negativo — b, a expressão completa seria $+a$ — —b. Nesta expressão fica claro que o primeiro sinal — indica simplesmente uma subtração, e o segundo sinal — mostra a natureza negativa da quantidade — b. Ora, como a repetição de dois sinais iguais pode trazer confusão, emprega-se o parêntesis ( ) para se escrever com clareza as expressões algébricas, e assim temos $a-(-b)$.

62. Quando duas ou mais quantidades são consideradas como um só termo, fecham-se em um parêntesis, para serem tomadas neste sentido. Assim, a expressão $10-(6+2)$ mostra que de 10 temos de subtrair $6+2$, isto é, 8. Se tirássemos o parêntesis, a expressão seria $10-6+2$, isto é, mostraria que de 10 deveríamos tirar 6, e ao resto juntar 2, o que daria um resultado diferente do primeiro; precisamos, pois, saber tirar o parêntesis de uma expressão algébrica sem lhe alterar o valor.

63. Os dois princípios seguintes nos esclarecerão perfeitamente neste ponto.

1.° *Quando uma expressão algébrica fechada num parêntesis é precedida pelo sinal +, pode-se tirar o parêntesis sem se alterar o valor da expressão.*

Demonstração. Segundo êste princípio, a expressão $a+(b-c)$ deve ser igual a $a+b-c$. Ora é evidente que tirando o parêntesis em nada se altera a expressão, porque em ambos os casos junta-se $b-c$ à quantidade a.

Dando à letra a o valor de 5, a b o valor de 4, e a c o valor de 3, teremos:

$$a+(b-c)=5+\ 4-3\ =6.$$
$$a+(b-c)=5+(4-3)=6.$$

2.° *Quando uma expressão algébrica fechada por um parêntesis é precedida pelo sinal —, para se tirar o parêntesis sem se alterar o valor da expressão, é necessário trocar os sinais de todos os termos fechados no parêntesis: o que fôr positivo, ficará negativo; e o que fôr negativo ficará positivo.*

Demonstração. Segundo êste princípio, a expressão $a-(b-c)$ deve ser igual a $a-b+c$. O termo b, que no parêntesis tinha o sinal + subentendido, fica com o sinal — para indicar a subtração; o termo c, que tinha o sinal —, fica com o sinal +, pela razão exposta no n.º **59**. Dando a estas letras os mesmos valores que demos acima, teremos:

$$a-(b-c)=5-(4-3)=4.$$
$$a-b+c=5-4+3=4.$$

64. Quando duas ou mais quantidades que já teem um parêntesis, são consideradas como um só termo, costuma-se encerrá-las num *colchete*, como $a-[b+(c-d)]$.

Com o auxílio do parêntesis e do colchete podemos exprimir um polinômio por diversas formas sem alterarmos o seu valor.

Tirar o parêntesis dos seguintes polinômios sem lhes alterar o valor:

1. $a-(+b)$. Resp. $a-b$.
2. $a-(-b)$. » $a+b$.
3. $ab+(a-c)$. » $ab+a-c$.
4. $ax-(a-y)$. » $ax-a+y$.
5. $a-b-(a+b)$. » $-2b$.
6. $2a+(8-7+6)-x$. Resp. ?.
7. $5x-3b-(-3a+c)$. » ?.
8. $2a-b-(2a+b)$. » ?.
9. $ab-(bc-d)$. » ?.
10. $5x-(-y+ab-4d)$. » ?.

MULTIPLICAÇÃO

65. A quantidade que se multiplica, chama-se **multiplicando;** a quantidade pela qual ela é multiplicada, chama-se **multiplicador;** e o resultado da operação chama-se **produto.**

O multiplicando e o multiplicador chamam-se também **fatores** do produto.

66. Como foi já demonstrado no n.º **16**, *o produto de duas ou mais quantidades é sempre o mesmo, seja qual fôr a ordem em que tomarmos êsses fatores.*

Isto quer dizer que se tomarmos o multiplicando pelo multiplicador ou o multiplicador pelo multiplicando, o produto será sempre o mesmo. Assim $5\times4=4\times5$; do mesmo modo $a\times b=b\times a$; em ambos os casos o produto é ab.

Segue-se deste princípio que o produto de $a\times c\times3$, de $a\times3\times c$ ou de $3\times c\times a$ é o mesmo; e como se escreve primeiro o coeficiente numérico e depois as letras na ordem alfabética, o produto nos três casos é $3ac$.

67. Na multiplicação algébrica há três casos a considerar, que são:

1.º *Quando os dois fatores são monômios.*
2.º *Quando um fator é polinômio e o outro monômio.*
3.º *Quando ambos os fatores são polinômios.*

Primeiro caso da multiplicação

68. Em cada caso da multiplicação algébrica é necessário que o discípulo saiba operar com quatro dados que são:

1.º *O coeficiente.*
2.º *A parte literal.*
3.º *O expoente.*
4.º *O sinal.*

69. O coeficiente e a parte literal. Para determinar a regra para achar o coeficiente e a parte literal do produto, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o produto de $2a$ multiplicado por $3b$?

Solução. O produto de 2×3 é 6; o produto de $a\times b=ab$. (n. **14**). Então o produto de $2a\times3b=6ab$.

Operação	
Multiplicando	$2a$
Multiplicador	$3b$
Produto	$6ab$

Regra. *Para se obter o coeficiente e a parte literal de um produto, multiplicam-se entre si os coeficientes, e ao produto juntam-se todas as letras dos dois fatores na ordem alfabética.*

Exemplos para resolver:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	$3x$	$4ab$	$15ac$	$19abc$
Multiplicador	$2y$	$3cd$	x	$5dx$
Produto	$6xy$	$12abcd$	$15acx$	$95abcdx$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
$9acx$	$20xy$	$18az$	$28xz$	$15xy$
$7b$	$10z$	$15by$	y	$8ab$

70. O expoente. Para determinarmos a regra do expoente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o produto de $3a^2$ multiplicado por $4a^3$?

Solução. Multiplicando os coeficientes, temos $3\times4=12$; multiplicando agora as duas potências de a, temos $a^2\times a^3=a^{2+3}=a^5$. O produto é pois $12a^5$.

Operação

$$\begin{array}{r} 3a^2 \\ 4a^3 \\ \hline 12a^5 \end{array}$$

Demonstração. Desde que $3a^2=3aa$, e $4a^3=4aaa$, segue-se que o produto de $3aa\times4aaa$, é $12aaaaa$; ora, como $aaaaa$ se exprime a^5 (n.° **25**), segue-se que o produto é $12a^5$. Portanto,

Regra. *O expoente de uma letra no produto é igual à soma dos expoentes da mesma letra nos dois fatores.*

Exemplos para resolver:

(1.) $\begin{array}{r} 3b \\ 5b \\ \hline 15b^2 \end{array}$ (2.) $\begin{array}{r} 4ab \\ a \\ \hline 4a^2b \end{array}$ (3.) $\begin{array}{r} 7ab^3 \\ 5ab \\ \hline 35a^2b^4 \end{array}$ (4.) $\begin{array}{r} 18ab \\ 5b^2c \\ \hline 90ab^3c \end{array}$ (5.) $\begin{array}{r} 26x^3 \\ 5a^4x^2 \\ \hline 130a^4x^5 \end{array}$

(6.) $\begin{array}{r} 12b^3 \\ b \\ \hline \end{array}$ (7.) $\begin{array}{r} 13ab^2 \\ 6a^2b \\ \hline \end{array}$ (8.) $\begin{array}{r} 18a^2b^2 \\ 5ab^3 \\ \hline \end{array}$ (9.) $\begin{array}{r} 20x^5y \\ 8x^4y \\ \hline \end{array}$ (10.) $\begin{array}{r} 7abcd \\ 9ab^2c^3d \\ \hline \end{array}$

Nota. Quando ambos os fatores da multiplicação são potências da mesma letra, pode-se operar simplesmente com os expoentes. Assim, $c^3\times a^2=a^{3+2}=a^5$; $x^2\times x=x^{2+1}=x^3$; $x^3\times x^2\times x^4=a^{3+2+4}=x^9$.

71. Os sinais. Investigando as leis que regem os sinais do produto, temos o resultado seguinte:

Se os dois fatores tiverem o mesmo sinal, o sinal do produto será positivo; mas se forem de sinais contrários, o sinal do produto será negativo. Isto quer dizer que

$+$ multiplicado por $+$ dá $+$,
$-$ multiplicado por $-$ dá $+$,
$+$ multiplicado por $-$ dá $-$,
$-$ multiplicado por $+$ dá $-$.

Demonstração. Para podermos compreender a razão dêste resultado, devemos analisar cada um dêstes casos separadamente.

PRIMEIRO CASO. Qual é o produto de $+a$ multiplicado por $+4$?

Análise. A quantidade $+a$ tomada uma vez é $+a$; tomada duas vezes é $+2a$; tomada três vezes é $+3a$, e tomada quatro vezes é $+4a$.

Ora, como o multiplicador é positivo, mostra que o produto $+4a$ deve entrar no cálculo de que esta multiplicação faz parte, como uma quantidade aditiva, e por isso deve levar o sinal $+$. Então o produto de $+a\times(+4)=+4a$. Logo, o *produto de duas quantidades positivas é positivo.*

SEGUNDO CASO. Qual é o produto de $-a$ multiplicado por -4?

Análise. A quantidade $-a$ tomada quatro vezes é $-4a$. Ora, o sinal do multiplicador sendo $-$, mostra que o produto $-4a$ tem de entrar no cálculo de que faz parte esta multiplicação, como um subtrativo; mas a subtração de uma quantidade negativa tem efeito positivo, isto é, essa quantidade entra no cálculo como um aditivo (n.° **57**), e por isso deve levar o sinal $+$; então, $-a\times(-4)=+4a$. Logo, o *produto de duas quantidades negativas é positivo.*

TERCEIRO CASO. Qual é o produto de $+a$ multiplicado por -4?

Análise. Já vimos no primeiro caso que a quantidade $+a$ tomada quatro vezes é $+4a$. Ora, como o sinal do multiplicador é $-$, mostra que o produto $+4a$ deve entrar no cálculo de que faz parte esta multiplicação, como um subtrativo, e por isso deve levar o sinal $-$; então $+a\times(-4)=-4a$. Logo, *uma quantidade positiva multiplicada por uma negativa, dá um produto negativo.*

QUARTO CASO. Qual é o produto de $-a$ multiplicado por $+4$?

Análise. A quantidade $-a$ tomada uma vez é $-a$; tomada duas vezes é $-2a$; tomada três vezes é $-3a$, e tomada quatro vezes é $-4a$. Ora, como o sinal do multiplicador é $+$, mostra que o produto $-4a$ deve entrar no cálculo de que faz parte esta multiplicação, como um aditivo; mas a adição de uma quantidade negativa é o mesmo que uma subtração, e por isso o produto deve levar o sinal $-$. Então o produto de $-a\times(+4)=-4a$. Logo, *uma quantidade negativa multiplicada por uma positiva, dá um produto negativo.*

72. Nestas quatro análises estabelecemos a seguinte regra dos sinais:

Regra. *O produto de quantidades de mesmo sinal leva o sinal $+$, e o produto de quantidades de sinais contrários leva o sinal $-$.*

Exercícios para resolver:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	$+5a$	$-3x$	$+5ab$	$-12y$
Multiplicador	$+2b$	$+x$	$-3bc$	$-5x$
Produto	$+10ab$	$-3x^2$	$-15ab^2c$	$+60xy$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
$+12x^2$	$-8ab$	$+16bx$	$-25x$	$+15abc$
$+5a$	$+9ac$	$-6a$	$-8y^2$	$-12ac$

Segundo caso da multiplicação

73. Quando o multiplicando é um polinômio, multiplica-se cada um dos seus termos pelo multiplicador, observando as regras dos coeficientes, expoentes, parte literal e sinais.

Problema. Qual é o produto de $a-b$ multiplicado por b?

Solução. Multiplicando cada termo do multiplicando pelo multiplicador, temos $a\times b=ab$. Como ambos os fatores teem o sinal + subentendido, o produto é positivo. O segundo termo é $b\times b=b^2$. Como neste caso um dos fatores tem o sinal —, e o outro, o sinal + subentendido, o produto será negativo, e o resultado da operação será $ab-b^2$.

Operação

$$\begin{array}{r} a-b \\ b \\ \hline ab-b^2 \end{array}$$

Demonstração. Podemos dar uma demonstração numérica da exatidão do produto, dando à quantidade a o valor de 5, e a b, o valor de 2. Multiplicando 5 — 2 por 2, temos o produto de $10-4=6$. Ora, o termo ab é igual a $5\times2=10$, e o termo b^2 igual a $2\times2=4$; logo, o produto $ab-b^2$ é igual a $10-4=6$.

$$\begin{array}{rcl} a-b & = & 5-2 \\ b & = & 2 \\ \hline ab-b^2 & = & 10-4=6 \end{array}$$

Exercícios para resolver:

(1.)
$$\begin{array}{r} ab+cd \\ ac \\ \hline a^2bc+ac^2d \end{array}$$

(2.)
$$\begin{array}{r} bc-ad \\ ab \\ \hline ab^2c-a^2bd \end{array}$$

(3.)
$$\begin{array}{r} 2a-b \\ -x \\ \hline -2ax+bx \end{array}$$

(4.)
$$\begin{array}{r} a+b-5. \\ 2a. \\ \hline 2a^2+2ab-10a \end{array}$$

5. Multiplicar $a+d$ por b. Resp. $ab+bd$.
6. Multiplicar $ac+bc$ por d. » $acd+bcd$.
7. Multiplicar $4x+5y$ por $3a$. » $12ax+15ay$.
8. Multiplicar $2x+3y$ por $2b$. » $4bx+6by$.
9. Multiplicar $m+2n$ por $-3n$. » $-3mn-6n^2$.
10. Multiplicar $x+y$ por ax. » ax^2+axy.
11. Multiplicar $2a+2b-3c$ por a. » $2a^2+2ab-3ac$.
12. Multiplicar $ab+ax+xy+6$ por $2ax$.
 Resp. $2a^2bx+2a^2x^2+2ax^2y+12ax$.

Terceiro caso da multiplicação

74. Quando ambos os fatores são polinômios, opera-se do seguinte modo:

Problema. Qual é o produto de $a+b$ multiplicado por $a+b$?

Solução. Multiplicando $a+b$ por a, temos o produto parcial a^2+ab; multiplicando depois $a+b$ por b, temos o produto parcial $ab+b^2$; somando agora os dois produtos parciais, temos $a^2+2ab+b^2$, que é o produto total da multiplicação.

Operação

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Regra geral. *Multiplica-se cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador conforme a regra dos coeficientes, parte literal, expoentes e sinais; e a soma algébrica de todos os produtos parciais será o produto total.*

Operar as seguintes multiplicações:

(1.)
$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

(2.)
$$\begin{array}{r} 3a^3b+a^2b \\ 4a^2b-3ab \\ \hline 12a^5b^2+4a^4b^2 \\ -9a^4b^2-3a^3b^3 \\ \hline 12a^5b^2-5a^4b^2-3a^3b^2 \end{array}$$

3. Multiplicar $a+b$ por $x-y$. Resp. $ax-ay+bx-by$.
4. Multiplicar $a-b$ por $a-b$. » $a^2-2ab+b^2$.
5. Multiplicar $a-b$ por $a+b$. » a^2-b^2.
6. Multiplicar a^2+ac+c^2 por $a-c$. » a^3-c^3.
7. Multiplicar $m+n$ por $m-n$. » m^2-n^2.
8. Multiplicar y^2-y+1 por $y+1$. » y^3+1.
9. Multiplicar x^2+y^2 por x^2-y^2. » x^4-y^4.
10. Multiplicar a^2-3a+8 por $a+3$. » a^3-a+24.
11. Multiplicar $3a+5b$ por $3a-5b$. » $9a^2-25b^2$.
12. Multiplicar a^2-ab^2+ por $a+b$. » ?
13. Multiplicar $d-bx$ por $d-cx$. » ?
14. Multiplicar $3a^2+x$ por $2a^2+4x$. » ?

Uso do parêntesis na multiplicação

75. Um parêntesis unido ao sinal × mostra-nos que cada termo do parêntesis tem de ser multiplicado pelo termo a que está ligado o sinal ×. Assim, $2a\times(a+b-c)$ ou $(a+b-c)\times2a$ mostra que os termos a, b e $-c$ teem de ser multiplicados por $2a$; e para tirarmos o parêntesis desta expres-

são sem lhe alterarmos o valor, é necessário operar a multiplicação, e a expressão se transformará em $2a^2+2ab-2ac$.

76. Quando entre dois parêntesis, o sinal × nos mostra que a quantidade contida no primeiro parêntesis deve ser multiplicada pela quantidade contida no segundo. Assim, a expressão $(a+x)\times(a-x)$ mostra que $a+x$ deve ser multiplicado por $a-x$, e o resultado desta expressão será a^2-x^2.

Nota. Na prática suprime-se sempre o sinal ×, e escreve-se simplesmente $2a$ $(a+b-c)$ e $(a+x)$ $(a-x)$.

Dois ou mais polinômios fechados cada um por um parêntesis, mostram que se requer o produto de todos. Assim, a expressão $(a+b)$ $(a+c)$ $(a-d)$ quer dizer $(a+b)\times(a+c)\times(a-d)$.

Tirar o parêntesis das seguintes expressões sem lhes alterar o valor:

1.	$ab(a+b)$.	Resp.	a^2b+ab^2.
2.	$(ab-3a)5$.	»	$5ab-15a$.
3.	$a(x-y)$.	»	$ax-ay$.
4.	$(x+y)$ $(x+y)$.	»	$x^2+2xy+y^2$.
5.	$(a-b)$ $(a+b)$.	»	a^2-b^2.
6.	$(5+6+3-12)x$.	»	$2x$.
7.	$3x(a+ab-x)$.	»	$3ax+3abx-3x^2$.
8.	$abc(a-ac)$.	»	$a^2bc-a^2bc^2$.
9.	$(ab+cd)$ $(ab-cd)$.	»	$a^2b^2-c^2d^2$.
10.	$(a+b)$ $(a+b)+(a-b)$ $(a-b)$.	»	$2a^2+2b^2$.
11.	$(5+8a)2a$.	»	?
12.	$(x+3y)5$.	»	?
13.	$2x(5x-3y)$.	»	?
14.	$xy(a+b-3)$.	»	?
15.	$(a+b)$ $(a+b)$.	»	?
16.	$(a+2b)$ $(2-a)$.	»	?
17.	$2ab(x+y+z)$.	»	?

77. Quando se quer indicar o quadrado de um polinômio, isto é, o produto de um polinômio multiplicado por si mesmo, fecha-se o polinômio com um parêntesis e dá-se-lhe o expoente 2; quando se quer indicar o seu cubo, dá-se-lhe o expoente 3; quando se quer indicar a quarta potência, dá-se-lhe o expoente 4, e assim por diante. De sorte que,

$(a+b)^2=(a+b)$ $(a+b)$ ou $a^2+2ab+b^2$.
$(a+b)^3=(a+b$ $(a+b)$ $(a+b)$.
$(a+b)^4=(a+b)$ $(a+b)$ $(a+b)$ $(a+b)$.

Achar o resultado das seguintes expressões:

18.	$(2a+y)^2$..	Resp.	$4a^2+4ay+y^2$.
19.	$(x-3)^3$.	»	$x^3-9x^2+27x-27$.
20.	$(4a+5b)^2$.	»	?
21.	$(a+b-2c)^3$.	»	?
22.	$(6-4)^4$.	»	?

DIVISÃO

78. Divisão é a operação que tem por fim achar quantas vezes uma expressão algébrica contém outra.

A expressão que se divide, chama-se **dividendo.**

A expressão pela qual se divide o dividendo, chama-se **divisor.**

O resultado da operação chama-se **quociente.**

79. A divisão é o inverso da multiplicação, e por isso, multiplicando o divisor pelo quociente, obteremos exatamente o dividendo.

A divisão indica-se escrevendo o divisor debaixo do dividendo em forma de fração. Assim, para indicarmos que ab deve ser dividido por a, escreveremos $\frac{ab}{a}$. Também se pode indicar a divisão como em Aritmética, escrevendo o divisor à direita do dividendo, como: $ab \;|\; a$.

Na divisão há três casos a considerar, que são:

1.° *Dividir um monômio por outro monômio.*
2.° *Dividir um polinômio por um monômio.*
3.° *Dividir um polinômio por outro polinômio.*

Primeiro caso da divisão

80. Na divisão, assim como na multiplicação, é necessário que o discípulo saiba, em qualquer caso, operar com os quatro dados seguintes:

1.° *O coeficiente.*
2.° *A parte literal.*
3.° *O expoente.*
4.° *O sinal.*

81. O coeficiente e a parte literal. Para determinarmos a regra para se achar o coeficiente e a parte literal do quociente, resolveremos os seguintes problemas:

I Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por 2?

Solução. Dividir $6ab$ por 2 é dividir esta quantidade em duas partes iguais, e por isso o quociente é $3ab$. Multiplicando agora o divisor pelo quociente, temos $2 \times 3ab = 6ab$ que subtraído do dividendo, não deixa resto.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 6ab & 2 \\ \hline 6ab & 3ab \\ 0 & \end{array}$$

II Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por $3ab$?

Solução. Em $6ab$ quantas vezes há $3ab$? Há 2 vezes, porque 2 vezes $3ab$ são $6ab$; então o quociente é 2.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 6ab & 3ab \\ \hline 6ab & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o coeficiente do dividendo pelo coeficiente do divisor, e ao quociente junta-se a parte literal do dividendo que não estiver no divisor, de sorte que, multiplicado o divisor pelo quociente, dê o dividendo.*

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{r|l} 6a & 6 \\ \hline 6a & a \\ 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{r|l} ab & a \\ \hline ab & b \\ 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{r|l} 3ab & b \\ \hline 3ab & 3a \\ 0 & \end{array}$ (4.) $\begin{array}{r|l} abx & x \\ \hline abx & ab \\ 0 & \end{array}$ (5.) $\begin{array}{r|l} 8aby & 2ay \\ \hline 8aby & 4b \\ 0 & \end{array}$

(6.) $8xy \mid 4x$ (7.) $15x \mid 3$ (8.) $18abc \mid 6abc$ (9.) $25xyz \mid 5z$ (10.) $21abcd \mid 7c$

82. O expoente. Para estabelecermos a regra para achar o expoente do quociente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o quociente de $6a^5$ dividido por $2a^2$?

Solução. Dividindo 6 por 2, o quociente é 3. Para se dividir a^5 por a^2, acha-se a diferença dos expoentes, que é $5—2=3$. Então o quociente de $a^5 \div a^2$ é $a^{5—2}=a^3$, porque $a^2 \times a^3 = a^5$. Juntando agora os coeficientes, temos $6a^5 \div 2a^2 = 3a^3$.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 6a^5 & 2a^2 \\ \hline 6a^5 & 3a^3 \\ 0 & \end{array}$$

Demonstração. O dividendo $6a^5$ é igual a $6aaaaa$, e o divisor $2a^2$, igual a $2aa$. Ora, desde que a letra a entra 5 vezes como fator no dividendo, e só 2 vezes no divisor, claro está que ela terá de entrar 3 vezes no quociente, para que o produto do divisor multiplicado pelo quociente dê o dividendo.

$$\begin{array}{r|l} aaaaa & aa \\ \hline aaaaa & aaa \\ 0 & \end{array}$$

Como o expoente, mostra quantas vezes uma letra é tomada como fator, segue-se que a diferença entre o expoente do dividendo e o do divisor será o expoente do quociente.

Regra. *Do expoente de uma letra no dividendo subtraindo o expoente da mesma letra no divisor, o resto será o expoente dessa letra no quociente.*

Nota. Quando o dividendo e o divisor são só potências da mesma letra, pode-se operar só com o expoente. Assim, $x^8 \div x^5 = x^{8—5} = x^3$, $x^2 \div x = x^{2—1} = x^1 = x$.

Operar as seguintes divisões:

(1.) $\begin{array}{r|l} xy^2 & x \\ \hline xy^2 & y^2 \\ 0 & \end{array}$ (2.) $\begin{array}{r|l} ab^3 & b^3 \\ \hline ab^3 & a \\ 0 & \end{array}$ (3.) $\begin{array}{r|l} 12a^5b^2 & 3a^3b \\ \hline 12a^5b^2 & 4a^2b \\ 0 & \end{array}$ (4.) $\begin{array}{r|l} 6xy^3 & 3y^3 \\ \hline 6xy^3 & 2x \\ 0 & \end{array}$

(5.) $x^5 \mid x$ (6.) $y^4 \mid y^2$ (7.) $a^7 \mid a^5$ (8.) $x^{12} \mid x$

(9.) $16ab^2 \mid 4ab$ (10.) $14xy \mid 7$ (11.) $24abc^2 \mid 8ac$ (12.) $7x^3y^2 \mid xy$

83. Os sinais. A regra para os sinais na divisão é a mesma que na multiplicação. Se os dois termos da divisão tiverem o mesmo sinal, o quociente será positivo; se tiverem sinais contrários, o quociente será negativo.

Demonstração. Demonstra-se êste resultado com a própria regra dos sinais na multiplicação; pois, se os sinais de dois fatores de uma multiplicação produzem o sinal do produto, claro está que o sinal do produto dividido por um dos fatores, dará o sinal do outro fator. De sorte que, sendo

$$a.(+b)=+ab, \text{ então } ab \div (+b) = +a.$$
$$—a.(—b)=+ab, \text{ então } ab \div (—b) = —a.$$
$$a.(—b)=—ab, \text{ então } —ab \div (—b) = +a.$$
$$—a.(+b)=—ab, \text{ então } —ab \div (+b) = —a.$$

Problema. Qual é o quociente de $—18abc$ dividido por $+6b$?

Solução. — $18abc$ dividido por $6b$, o quociente é — $3ac$. Como o sinal do dividendo é —, e o sinal do divisor é +, segue-se que o sinal do quociente deve ser —, para que multiplicado o divisor pelo quociente dê o dividendo. Então o quociente é — $3ac$, porque $+6b \times (—3ac)$ dá — $18abc$.

Operação

$$\begin{array}{r|l} —18abc & +6b \\ \hline —18abc & —3ac \\ 0 & \end{array}$$

Regra. *Se o dividendo e o divisor tiverem o mesmo sinal, o quociente terá o sinal +; se tiverem sinais contrários, o quociente terá o sinal —.*

Operar as seguintes divisões:

(1.)
$$\begin{array}{r|l} +15ax & -3x \\ \hline +15ax & -5a \\ \hline 0 & \end{array}$$

(2.)
$$\begin{array}{r|l} -32abc & -4ab \\ \hline -32abc & +8c \\ \hline 0 & \end{array}$$

(3.)
$$\begin{array}{r|l} +21xy^2 & +7y \\ \hline +21xy^2 & +3xy \\ \hline 0 & \end{array}$$

(4.)
$$\begin{array}{r|l} -27axy & +9a \\ \hline \end{array}$$

(5.)
$$\begin{array}{r|l} 33bc & -11c \\ \hline \end{array}$$

(6.)
$$\begin{array}{r|l} +18a^3b^4 & 9a^2 \\ \hline \end{array}$$

84. Em todos os exemplos que temos dado na divisão de monômios, o dividendo é exatamente divisível pelo divisor; há, porém, três casos em que um monômio não pode ser exatamente dividido por outro monômio. Estes três casos são:

1.° Quando o coeficiente do dividendo não é exatamente divisível pelo coeficiente do divisor.

2.° Quando a mesma letra tem um expoente maior no divisor que no dividendo.

3.° Quando o divisor tem uma ou mais letras que não se acham no dividendo.

85. Em qualquer destes casos, indica-se a divisão escrevendo o divisor debaixo do dividendo, em forma de fração; e o quociente será então um monômio fracionário, que pode ser simplificado, se o dividendo e o divisor tiverem algum fator ou divisor comum.

Antes, porém, de entrarmos neste processo, precisamos saber o que quer dizer em Álgebra a palavra cancelar.

86. A palavra **cancelar** significa passar um traço ou risco sôbre um número ou letra para indicar que o seu valor foi dividido por si próprio ou por um de seus fatores; assim $\not 3$, $\not 5$, $\not a$, $\not 9$, $\not x$, $\not y$.

O cancelamento tem muita aplicação em Álgebra e Aritmética onde já aprendemos que, para não alterar o valor de uma fração devemos dividir ambos os seus termos pelo mesmo número.

Problema. Qual é o quociente de $15ax$ dividido por $9x^2y$?

Operação

$$\frac{15ax}{9x^2y} = \frac{\not 3 \times 5 \times a \times \not x}{\not 3 \times 3 \times \not x \times x \times y} = \frac{5a}{3xy}$$

Solução. Por três razões o dividendo $15ax$ não pode ser dividido exatamente por $9x^2y$. Primeira, porque o coeficiente 15 não pode ser dividido pelo coeficiente 9. Segunda, porque o expoente de x é maior no divisor do que no dividendo. Terceira, porque a letra y não se acha no dividendo. A divisão será então indicada escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo; mas, como 15 e 9 são divisíveis por 3, opera-se a simplificação, e estes dois coeficientes ficarão reduzidos a 5 e a 3. Como a letra x é comum a ambos os termos, cancela-se no dividendo e no divisor, e ela ficará reduzida de x^2 ou $x \times x$ a x, e o quociente simplificado será $\frac{5a}{3xy}$.

Demonstração. O dividendo $15ax$ é composto de $3 \times 5 \times a \times x$, e o divisor $9x^2y$ é composto de $3 \times 3 \times x \times x \times y$. Ora, cancelando-se o mesmo fator no dividendo e no divisor, não se altera o valor do quociente. (Arit. Progressiva n.° 81). Então cancelando os fatores 3 e x, que são comuns ao dividendo e no divisor, teremos o quociente reduzido a $\frac{5a}{3xy}$. Este processo é uma simples redução de uma fração algébrica à sua expressão mais simples, da qual trataremos mais adiante.

87. Operar as seguintes divisões:

1. Dividir $6amx$ por $3abc$. Resp. $\frac{2mx}{bc}$.
2. Dividir $49a^2b^2$ por $14a^3b$. » $\frac{7b}{2a}$.
3. Dividir $18a^2b$ por $12a^4b^4$. » $\frac{3}{2a^2b^3}$.
4. Dividir $28a^5b^6c^7$ por $16ab^2c^8$. » $\frac{7a^4b^4}{4c}$.
5. Dividir $100a^8b^5x$ por $25a^3b^4d$. » $\frac{4a^5bx}{d}$.
6. Dividir $121a^3b^2c^5$ por $11b^3$. » $\frac{11a^3c^5}{b}$.

Segundo caso da divisão

88. A divisão de um polinômio por um monômio opera-se do seguinte modo:

Problema. Dividir $ab+ac+ad$ por a.

Operação

$$\begin{array}{r|l} ab+ac+ad & a \\ \hline ab+ac+ad & b+c+d \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Solução. Desde que o fator a entra em cada um dos termos do dividendo, é claro que cada termo do dividendo pode ser dividido por a. Portanto,

Regra. *Divide-se cada termo do dividendo pelo divisor, observando as regras dos coeficientes, parte literal, expoentes e sinais.*

Operar as seguintes divisões:

		Resp.
1.	Dividir $6x+12y$ por 3.	$2x+4y$.
2.	Dividir $15x—20b$ por 5.	» $3x—4b$.
3.	Dividir $21a+35b$ por $—7$.	» $—3a—5b$.
4.	Dividir $6ax+9ay$ por $3a$.	» $2x+3y$.
5.	Dividir $ab+ac$ por a.	» $b+c$.
6.	Dividir $abc—acf$ por ac.	» $b—f$.
7.	Dividir $12ay—8ac$ por $—4a$.	» $—3y+2c$.
8.	Dividir $10ax—15ay$ por $—5a$.	» $—2x+3y$.
9.	Dividir $12bx—18x^2$ por $6x$.	» $2b—3x$.
10.	Dividir $a^2b^2—2ab^3x$ por ab.	» $ab—2b^2x$.
11.	Dividir $12a^2bc—9acx^2+6ab^2c$ por $3ac$.	» $4ab—3x^2+2b^2$.
12.	Dividir $15a^5b^2c—21a^2b^3c^2$ por $3a^2bc$.	» $5a^3b—7b^2c$.
13.	Dividir $—16by^3+4y^2$ por $4y^2$.	» $—4by+1$.
14.	Dividir $3ab+15a^2b—27a^3b$ por $3ab$.	» ?
15.	Dividir $4a^4—20a^3+8ab$ por $4a$.	» ?

Terceiro caso da divisão

89. Para operarmos o terceiro caso da divisão algébrica, é conveniente sabermos ordenar um polinômio.

Já vimos no n.º **36** que a ordem em que escrevemos os termos de um polinômio, não altera o seu valor. Assim, $a+b$ é igual a $b+a$; do mesmo modo x^2+xy é igual a $xy+x^2$. Há, porém, certa conveniência em escrever os termos de um polinômio em certa ordem para facilitar a divisão e outros processos algébricos.

90. Ordenar um polinômio é pois escrever todos os seus termos de modo que os expoentes de uma letra vão constantemente crescendo ou decrescendo. O polinômio diz-se, então, ordenado segundo as potências crescentes ou decrescentes dessa letra que se chama letra ordenadora.

Para ordenar, por exemplo, o polinômio $23a^2b+5b^3+$ $+22ab^2+6a^3$, segundo as potências decrescentes de a, toma-se o termo que tem a mais alta potência de a, e depois, em or-

dem decrescente, as outras potências de a, e teremos $6a^3+$ $+23a^2b+22ab^2+5b^3$. O expoente de a decresce até desaparecer.

91. Para se operar uma divisão de polinômios, é conveniente ordenar também o divisor, isto é, escrevê-lo de modo que o primeiro termo do dividendo seja exatamente dividido pelo primeiro termo do divisor, para assim facilitar a divisão. Se quisermos dividir $a^2+2ab+b^2$ por $b+a$, é mais conveniente ordenar êste divisor segundo as potências decrescentes de a e escrever $a+b$, porque é nesta ordem que as letras a e b estão no dividendo.

Problema. Dividir $6a^2—13ax+6x^2$ por $2a—3x$.

Solução. Como o dividendo e o divisor já se acham ordenados no problema, procede-se à divisão.

Dividindo o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, o quociente é $3a$; multiplicando agora o divisor por êste termo, achamos o produto $6a^2—9ax$, que subtraído do dividendo, deixa o resto $—4ax$ que com o termo seguinte do dividendo faz o dividendo parcial $—4ax+6x^2$.

Dividindo agora o primeiro termo do dividendo parcial pelo primeiro termo do divisor, o quociente é $—2x$. Multiplicando o divisor por êste termo, temos $—4ax+6x^2$ que subtraído do dividendo parcial, não deixa resto. O quociente é pois $3a—2x$.

Prova. Multiplicando o divisor pelo quociente, obtemos exatamente o dividendo, o que prova que a divisão está exata.

Operação

$$\begin{array}{l|l} 6a^2—13ax+6x^2 & 2a—3x \\ \hline 6a^2—\ 9ax & 3a—2x \\ \quad —\ 4ax+6x^2 & \\ \hline 0\ —\ 4ax+6x^2 & \\ \hline \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a—3x \\ 3a—2x \\ \hline 6a^2—9ax \\ —4ax+6x^2 \\ \hline 6a^2—13ax+6x^2 \end{array}$$

Regra. *Ordenam-se o dividendo e o divisor, e depois divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor, e o resultado será o primeiro termo do quociente.*

Multiplica-se o divisor por êste termo do quociente, o produto subtrai-se do dividendo, e ao resto junta-se o termo seguinte do dividendo para formar um novo dividendo parcial.

Repete-se êste processo até se dividirem todos os termos do dividendo; se não houver resto, a divisão é exata.

Operar as seguintes divisões:

(1.)

Dividendo — Divisor

$$\begin{array}{l|l} 6a^2-2a-8 & 2a+2 \\ \underline{6a^2+6a} & \overline{3a-4} \text{ Quociente} \\ 0-8a-8 & \\ \underline{0-8a-8} & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

(2.)

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3y+x^2y+xy^2+2y & x+y \\ \underline{x^4+x^3y} & \overline{x^3+xy} \\ 0 \quad 0 \quad x^2y+xy^2 & \\ \quad\quad\;\; \underline{x^2y+xy^2} & \\ \quad\quad\;\; 0 \quad 0+2y & \end{array}$$

Nota. No segundo exemplo, a divisão não é exata, e o quociente é misto, porque é $x^3+xy+\frac{2y}{x+y}$.

3. Dividir $4a^2-8ax^2+4x^2$ por $2a-2x$. Resp. $2a-2x$.
4. Dividir $2x^2+7xy+6y^2$ por $x+2y$. » $2x+3y$.
5. Dividir $x^2+2xy+y^2$ por $x+y$. » $x+y$.
6. Dividir $8a^4-8x^4$ por $2a^2-2x^2$. » $4a^2+4x^2$.
7. Dividir $ac+bc-ad-bd$ por $a+b$. » $c-d$.
8. Dividir $x^3+y^3+5xy^2+5x^2y$ por $x^2+4xy+y^2$ » $x+y$.
9. Dividir $a^3-9a^2+27a-27$ por $a-3$. » a^2-6a+9.
10. Dividir a^3-b^3 por a^2+ab+b^2. » $a-b$.
11. Dividir y^3+1 pro $y+1$. » y^2-y+1.
12. Dividir $12x^4-192$ por $3x-6$. » ?
13. Dividir a^6-b^6 por $a+b$. » ?
14. Dividir $4x^4-64$ por $2x-4$. Resp. $2x^3+4x^2+8x+16$.
15. Dividir x^4-y^4 por $x-y$. » $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

TEOREMAS

92. Vamos dar agora alguns teoremas importantes que habilitarão os alunos a obter com muita facilidade o produto de certas quantidades, e a decomposição com igual presteza em seus fatores componentes.

Estes teoremas devem ser conservados na memória para se tirar proveito dêles.

1.° Teorema

93. A soma das quantidades a e b é $a+b$; quadrando agora esta soma, isto é, multiplicando-a por si mesma $(a+b)(a+b)$ ou $(a+b)^2$, temos o produto $a^2+2ab+b^2$, como verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \quad\;\; \\ \underline{+ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

I Teorema. *O quadrado da soma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais duas vezes o produto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

O discípulo achará o quadrado das seguintes quantidades por meio dêste teorema:

	Respostas		Respostas
1. $(2+3)^2$	$4+12+9$.	5. $(2+5)^2$	?
2. $(2a+b)^2$	$4a^2+4ab+b^2$.	6. $(2m+3n)^2$	?
3. $(3x+2y)^2$	$9x^2+12xy+4y^2$.	7. $(ab+cd)^2$	?
4. $(ax+by)^2$	$a^2x^2+2abxy+b^2y^2$.	8. $(x^2+xy)^2$	?

2.° Teorema

94. A diferença entre as duas quantidades a e b é $a-b$; quadrando esta diferença, isto é, multiplicando-a por si mesma, $(a-b)^2$ ou $(a-b)(a-b)$, temos $a^2-2ab+b^2$, como verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \quad\;\; \\ \underline{-ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

II Teorema. *O quadrado da diferença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, menos duas vezes o produto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.*

Achar o quadrado das seguintes quantidades por meio dêste teorema:

	Respostas		Respostas
1. $(5-2)^2$	$25-20+4$.	5. $(8-3)^2$	?
2 $(2a-b)^2$	$4a^2-4ab+b^2$.	6. $(ab-c)^2$	?
3. $(3x-2y)^2$	$9x^2-12xy+4y^2$.	7. $(ax-2x^2)^2$	?
4. $(x^2-y^2)^2$	$x^4-2x^2y^2+y^4$.	8. $(5a^2-b^2)^2$	?

95. O sinal $\pm$ é uma combinação dos sinais $+$ e $-$, e lê-se: *mais ou menos*. Nos dois teoremas precedentes podemos conhecer pràticamente o sentido dêste sinal algébrico.

Desde que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, e $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, podemos exprimir estas duas fórmulas em uma só, escrevendo assim:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

Esta fórmula quer dizer que, se tomarmos o primeiro sinal $\pm$ no sentido positivo, o segundo sinal $\pm$ deverá também ser considerado positivo; se o tomarmos no sentido negativo, o segundo sinal deverá também ser considerado negativo. Este sinal tem por fim reduzir duas fórmulas ou duas respostas a uma só.

3.º Teorema

96. Multiplicando a soma $a+b$ pela diferença $a-b$, temos o produto seguinte: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, como vemos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad 0 \; -b^2 \end{array}$$

III Teorema. *O produto da soma pela diferença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira menos o quadrado da segunda.*

Achar o produto das seguintes quantidades por meio dêste teorema:

	Respostas		Respostas
1. $(5+3)(5-3)$.	$25-9$.	5. $(6+2)(6-2)$.	?
2. $(2a+b)(2a-b)$.	$4a^2-b^2$.	6. $(5a+c)(5a-c)$.	?
3. $(2x+3y)(2x-3y)$.	$4x^2-9y^2$.	7. $(2ab+y)(2ab-y)$.	?
4. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.	a^4-b^4.	8. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.	?

4.º Teorema

97. Se dividirmos 4 por 4, o quociente será 1, porque $\frac{4}{4}=1$. Assim, também, se dividirmos a^2 por a^2, o quociente será 1. Operando só com os expoentes, teremos $a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0$, isto é, a elevado à potência zero. Logo $a^0=1$. Podemos pois formular o

$$\frac{a^2}{a^2}=1$$

mas

$$a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0$$

$$\therefore a^0=1$$

IV Teorema. *Uma quantidade elevada à potência zero é igual à unidade ou a 1.*

Ilustração. Muitas vezes na divisão dos monômios acontece que os expoentes de uma letra sendo iguais no dividendo e no divisor, essa letra não aparece no quociente. Quando porém se quer conservar a letra original que desapareceu na operação, dá-se-lhe o expoente zero e inclue-se no quociente, e dêste modo, o quociente conservará a letra sem ficar alterado.

Se dividirmos, por exemplo, x^2y^2 por xy^2, operando só com os expoentes, o resultado será $x^2y^2 \div xy^2 = x^{2-1}y^{2-2} = x^1y^0 = x$: o quociente desta divisão é simplesmente x. Se porém incluirmos no quociente a letra y com o expoente zero, em nada alteraremos o seu valor, porque sendo $y^0=1$, segue-se então que $x \times 1 = x$, e então $xy^0=x$.

Deste modo, qualquer letra com o expoente zero pode ser incluída em um termo sem lhe alterar o valor.

Operar as seguintes divisões, conservando no quociente todas as letras do dividendo:

		Resp.
1.	Dividir $6a^2b^2c^4$ por $2a^2b^2$.	$3a^0b^0c^4=3c^4$.
2.	Dividir $8a^4b^3c^5$ por $4a^4b^3c$.	» $2a^0b^0c^4$.
3.	Dividir $32m^3n^2y^2$ por $4m^3n^2y^2$.	» $8m^0n^0y^0$.
4.	Dividir $-96a^4b^5c^2$ por $-24a^4b^5$.	» $4a^0b^0c^2$.
5.	Introduzir a e b como fatores em $9c^3d^2$.	» $9a^0b^0c^3d^2$.

5.º Teorema

98. Se dividirmos a diferença de duas potências iguais de duas quantidades pela diferença dessas quantidades, a divisão será exata como podemos verificar nos seguintes exemplos:

$$(a^2-b^2)\div(a-b)=a+b;$$
$$(a^3-b^3)\div(a-b)=a^2+ab+b^2;$$
$$(a^4-b^4)\div(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3;$$
$$(a^5-b^5)\div(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4.$$

Daqui poderemos estabelecer o

V Teorema. *A diferença de potências iguais de duas quantidades é sempre divisível pela diferença dessas quantidades.*

Nota. O discípulo deve verificar a exatidão das quatro divisões precedentes.

6.º Teorema

99. Se dividirmos a diferença de duas potências iguais e pares de duas quantidades, pela soma dessas quantidades, a divisão será exata, como podemos verificar pelos seguintes exemplos:

$$(a^2-b^2)\div(a+b)=(a-b);$$
$$(a^4-b^4)\div(a+b)=a^3-a^2b+ab^2-b^3;$$
$$(a^6-b^6)\div(a+b)=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5.$$

Daqui poderemos formular o

VI Teorema. *A diferença de potências iguais e pares de duas quantidades é sempre divisível pela soma dessas quantidades.*

Nota. O discípulo deve verificar a exatidão das três divisões precedentes.

7.° Teorema

100. Se dividirmos a soma de duas potências iguais e impares de duas quantidades pela soma das mesmas quantidades, a divisão será exata, como poderemos verificar nos exemplos seguintes:

$(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2$;
$(a^5+b^5)\div(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$;
$(a^7+b^7)\div(a+b)=a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$.

Daqui poderemos formular o

VII Teorema. *A soma de duas potências iguais e impares de duas quantidades é sempre divisivel pela soma dessas quantidades.*

Nota. O discípulo deve verificar a exatidão das quatro divisões precedentes.

DIVISORES E MÚLTIPLOS

101. Quando um número divide outro sem deixar resto, chama-se **divisor** dêsse numero. Assim, 4 é divisor de 12, porque o divide exatamente.

O divisor de um número chama-se também **fator** dêsse número; de sorte que 2, 3, 4 e 6 são divisores ou fatores de 12, porque cada um dêsses números divide exatamente o número 12.

102. Do mesmo modo a expressão algébrica que divide exatamente outra, chama-se divisor ou fator desta expressão. Assim, a^2 é divisor ou fator de a^2x, porque esta expressão se divide exatamente por a^2, pois $\frac{a^2x}{a^2}=x$.

103. Os números, quanto à sua divisibilidade, são ou primos ou múltiplos.

Números primos são os que não podem ser divididos exatamente senão por si mesmos ou por 1. Assim, o número 7 só é divisível por 7 ou por 1.

Todos os números primos desde 1 até 101 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

Números múltiplos são o produto de dois ou mais fatores diferentes, e por isso podem ser divididos exatamente por êsses fatores. Assim, 6 é o produto de 2 vezes 3 ou de 3 vezes 2, e por isso, além de ser divisível por si mesmo e por 1, como os números primos, é ainda divisivel por 2 e por 3.

104. O fator de um número é também fator de qualquer múltiplo dêsse número. Assim, se 3 divide 6, dividirá também 12, 18, 24, etc., que são múltiplos de 6.

105. O fator comum a dois números divide também a soma e diferença dêsses números. Assim, se 4 divide 12 e 16, dividirá também a sua soma, que é 12+16=28, e a sua diferença que é 16—12=4.

106. Todo número que fôr divisivel por dois números primos entre si, será também divisivel pelo seu produto. Do mesmo modo o número que fôr divisível por três ou mais outros primos entre si dois a dois, será também divisível pelo produto destes.

Ilustração. Os números que são divisíveis por 2 e por 3, também o são por 2×3=6; os que são divisíveis por 3 e por 4, também o são por 3×4=12, etc. O número que for divisível por 3, 4, 5 e 11, por exemplo, sê-lo-á também por 3×4×5×11, isto é, por 660.

107. Dêstes e de outros princípios deduzimos na Aritmética, os seguintes caracteres da divisibilidade:

1.° *Todo número par é divisivel por 2.*

2.° *Todo número, cuja soma dos seus algarismos fôr divisivel por 3, será também divisivel por 3.*

3.° *Todo número, cujos dois últimos algarismos da direita formarem um número múltiplo de 4, será também divisivel por 4.*

4.° *Todo número que terminar em 5 ou 0, será divisivel por 5.*

5.° *Todo número par divisivel por 3, será também divisivel por 6.*

6.° *Todo número, cuja soma dos seus algarismos fôr divisivel por 9, será também divisivel por 9.*

7.° *Todo número terminado em 0 é divisivel por 10 ou por 5 e por 2.*

108. Fatorar um número é decompô-lo em seus fatores primos, isto é, dividí-lo por todos os seus fatores primos até o quociente ficar 1.

Problema. Decompôr o número 210 em todos os seus fatores primos.

Solução. Começa-se a operação, dividindo 210 pelo menor número primo que o divida exatamente. Dividindo-se 210 por 2, o quociente é 105; dividindo-se agora 105 por 3, o quociente é 35, dividindo-se 35 por 5, o quociente é 7, e dividindo-se 7 por 7, o quociente é 1. Os fatores de 210 são 2, 3, 5, e 7.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Prova, $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

Regra. *Para acharmos todos os fatores de um número, dividiremos êsse número pelo menor número primo que não deixe resto; dividiremos depois o quociente por outro número primo que também não deixe resto; e assim continuaremos repetindo-se a divisão para cada fator tantas vezes quantas possíveis, até o quociente ser 1. Os vários divisores serão os fatores primos do número dado.*

Decompôr os seguintes números em todos os seus fatores primos:

1. 12...	Resp.	$2 \times 2 \times 3$	6. 20........	Resp.	?
2. 15...	»	3×5	7. 24........	»	?
3. 21...	»	3×7	8. 38........	»	?
4. 26...	»	2×13	9. 66........	»	?
5. 36...	»	$2 \times 2 \times 3 \times 3$	10. 100........	»	?

DECOMPOSIÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

109. As expressões algébricas, quanto à sua decomposição, dividem-se em primas e compostas.

Expressão prima é a que não pode ser dividida exatamente senão por si mesma ou por 1. Assim, a, $b+c$, $d+x-y$, são expressões primas, porque não tendo outro divisor além da unidade e da propria expressão, não podem ser fatoradas ou decompostas pela divisão.

110. Expressão composta é o produto de dois ou mais fatores. Assim, a quantidade ax é o produto de $a \times x$; a quantidade $ab+ac$ é o produto de $a(b+c)$; a quantidade $2a+6a^2+8a^3$ é produto de $2a(1+3a+4a^2)$, etc. Ora, sendo estas expressões formadas pela multiplicação de dois fatores, podem também pela divisão ser decompostas nesses mesmos fatores.

111. Ao decompor uma expressão algébrica podemos encontrar fatores primos e fatores múltiplos; estes, por sua vez, poderão ser decompostos até que todos os fatores sejam primos. Se dividirmos ax^2 em dois fatores a e x^2, o fator a será primo, e o fator x^2 será composto de $x \times x$. Se tomarmos ab como um fator, êle será um fator composto de $a \times b$; mas a e b, tomados separadamente, são fatores primos.

112. Duas ou mais expressões algébricas são primas entre si, quando nenhuma outra pode dividir a todas exatamente. Assim, ab e cd são expressões primas entre si, porque não há divisor que divida ambas exatamente.

113. Para decompormos um monômio, temos de fatorar primeiro o seu coeficiente numérico, conforme o método exposto no n.° **108** e depois fatorar a parte literal.

114. A decomposição da parte literal não oferece dificuldade alguma, porque estando cada fator literal expresso em uma letra ou em um expoente, só teremos de escrever cada fator do monômio separado pelo sinal $\times$.

Problema. Decompor o termo $15a^2b$ em seus fatores primos.

Solução. O coeficiente 15 decompõe-se em 3×5; a quantidade a^2 decompõe-se em $a \times a$; juntando-se ainda o fator b, ficará $3 \times 5 \times a \times a \times b$.

$$15a^2b$$
$$3 \times 5 \times a \times a \times b$$

Regra. *Para se fatorar um monômio, decompõe-se o coeficiente numérico em seus fatores primos, e a estes juntam-se todos os fatores literais do monômio, ficando cada um separado pelo sinal* $\times$.

Decompor os seguintes monômios em seus fatores primos:

1. $12ab^2c$.	Resp.	$2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c$.
2. $21a^2x^3y$.	»	$3 \times 7 \times a \times a \times x \times x \times x \times y$.
3. $35abc^2x$.	»	$5 \times 7 \times a \times b \times c \times c \times x$.
4. $26x^2y^3$.	»	?
5. $39a^2m^2n$.	»	?

Decomposição dos polinômios

115. Problema. Decompor $x+ax$ em seus fatores.

Solução. Vemos que x é fator comum aos dois termos do polinômio. Então, dividindo $x+ax$ por x, temos o quociente $1+a$. Os fatores são pois, o divisor x e o quociente $1+a$. A quantidade $x+ax$ decompõe-se em $x \times (1+a)$ ou $x(1+a)$.

$x+ax$	x
$x+ax$	$1+a$
0 0	

Regra. *Divide-se o polinômio pelo maior monômio que divida exatamente cada um dos seus termos.*

Então, o divisor será um fator, e o quociente será outro.

Decompor os seguintes polinômios em seus fatores:

1.	$2x+2$.	Resp.	$2(x+1)$.
2.	$am+ac$.	»	$a(m+c)$.
3.	bc^2+bcd.	»	$bc(c+d)$.
4.	$4x^2+6xy$.	»	$2x(2x+3y)$.
5.	$6ax^2y+9bxy^2-12cx^2y$.	»	$3xy(2ax+3by-4cx)$.
6.	$5ax^2-35ax^3y+5a^2x^3y$.	»	$5ax^2(1-7xy+axy)$.
7.	$a^3cm^2+a^2c^2m^2-a^2cm^3$.	»	$a^2cm^2(a+c-m)$.
8.	$a+ab+ac$.	»	?
9.	$2ax+2ay+4az$.	»	?
10.	$3bcx+6bcx-3abc$.	»	?

116. Para decompormos em seus fatores primos um binômio ou um trinômio, produto de dois ou mais polinômios, é necessário recorrermos aos seguintes princípios baseados nos teoremas que já formulámos:

1.° Um trinômio pode ser decomposto em dois fatores binômios, quando os termos extremos são quadrados positivos, e o termo medio é duas vezes o produto das raízes quadradas dos extremos. Os fatores serão a soma ou a diferença das raízes quadradas dos termos extremos, segundo fôr mais ou menos o sinal de termo médio (n.° **95**). Assim,

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b).$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b).$$

2.° Um binômio que é a diferença de dois quadrados, pode ser decomposto em dois fatores, sendo um a soma, e o outro a diferença das raízes dos dois quadrados (n. **99**). Assim,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

3.° Um binômio que é a diferença de potências iguais de duas quantidades, pode ser decomposto, pelo menos, em dois fatores, sendo um dêles a diferença das duas quantidades (n.° **98**). Assim,

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$
$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4).$$

Neste caso, dividindo-se o binômio pelo fator conhecido, acha-se o outro fator no quociente.

4.° Um binômio que é a diferença de potências iguais e pares de duas quantidades, pode ser decomposto, pelo menos, em três fatores, um dos quais é a soma, outro a diferença das quantidades. Aqui deve entender-se que as potências pares devem ser superiores ao quadrado (n. **99**). Assim,

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a+b)(a-b)(a^2+b^2).$$

Segundo êste princípio, o binômio a^4-b^4 pode ser decomposto nos fatores (a^2-b^2) (a^2+b^2); ora o fator a^2-b^2 pode ser também decomposto em $(a-b)$ $(a+b)$, e assim (a^4-b^4) pode ser decomposto nos fatores $(a-b)$, $(a+b)$ e (a^2+b^2).

5.° Um binômio que é a soma de potências iguais e ímpares de duas quantidades, pode ser decomposto, pelo menos, em dois fatores, sendo um dos fatores a soma das quantidades (n.° **100**). Assim,

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Decompor as seguintes expressões algébricas em seus fatores primos:

1.	$x^2+2xy+y^2$.	Resp.	$(x+y)(x+y)$.
2.	$9a^2+12ab+4b^2$.	»	$(3a+2b)(3a+2b)$.
3.	$4+12x+9x^2$.	»	$(2+3x)(2+3x)$.
4.	$m^2-2mn+n^2$.	»	$(m-n)(m-n)$.
5.	x^2-y^2.	»	$(x-y)(x+y)$.
6.	y^2-1.	»	$(y-1)(y+1)$.
7.	$9m^2-16n^2$.	»	$(3m-4n)(3m+4n)$.
8.	a^5-b^5.	Resp.	$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.
9.	$a^2b^2-c^2d^2$.	Resp.	?
10.	$4x^2-20xz+25z^2$.	»	?
11.	$a^2-2abx+b^2x^2$.	»	?
12.	x^5+y^5.	»	?

117. Muitas vezes um binômio ou trinômio contém mais fatores além dos que se podem conhecer pelos princípios já expostos; neste caso, é necessário decompor a quantidade em dois fatores, de sorte que um dos fatores seja o binômio ou trinômio nas condições de ser decomposto nos fatores referidos. Assim, $a^2x-x^3=x(a^2-x^2)$; ora, a^2-x^2 decompondo-se em $(a-x)(a+x)$, então a^2x-x^3 se decompõe em $x(a-x)(a+x)$.

13. $7a^2-14ax+7x^2$. Resp. $7(a-x)(a-x)$.
14. ax^2-ay^2. » ?
15. $cm^2+2cmn+cn^2$. » ?
16. ay^2-a. » ?

118. Quando o primeiro termo de um trinômio é um quadrado, e o coeficiente do segundo termo é a soma de duas quantidades, cujo produto é o terceiro termo, pode ser decomposto em dois fatores binômios. Assim, $a^2+7a+12$ é um trinômio que tem o primeiro termo quadrado; o coeficiente do segundo termo é a soma das quantidades $3+4=7$, cujo produto $3\times4=12$ é o terceiro termo, e por isso se decompõe em $(a+3)(a+4)$.

17. x^2+5x+6. Resp. $(x+2)(x+3)$.
18. x^2-5x+6. » $(x-2)(x-3)$.
19. $x^2-9x+20$. » $(x-4)(x-5)$.
20. $x^2+13x+40$. » $(x+5)(x+8)$.
21. x^2-6x+8. » $(x-2)(x-4)$.

119. A decomposição das quantidades algébricas, além de outras vantagens, auxilia a achar mais rapidamente o resultado das operações. Se quisermos, por exemplo, multiplicar $x^2+2xy+y^2$ por $x-y$, e depois dividir o produto por $x+y$, teríamos de fazer uma longa multiplicação e depois uma longa divisão, ambas as operações sujeitas a enganos. Decompondo, porém, $x^2+2xy+y^2$ em seus fatores $(x+y)(x+y)$, e indicando as operações, temos

$$\frac{(x+y)\ (x+y)\ (x-y)}{x+y,} = (x+y)\ (x-y) = x^2-y^2.$$

Nesta expressão, como o fator $x+y$ é comum ao dividendo e ao divisor, elimina-se ou cancela-se em ambos os termos, e o resultado é $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ (3.º Teorema).

MÁXIMO DIVISOR COMUM

120. Divisor comum de duas ou mais quantidades é uma quantidade que as divide a todas exatamente. Assim, a é divisor comum de ax, ab e ac, porque divide exatamente essas quantidades.

121. Máximo divisor comum de duas ou mais quantidades é a maior quantidade que divide todas elas exatamente.

122. Problema. Qual é o máximo divisor comum de $6abx$, $10acx$ e $4adx$?

Solução. Decompondo-se os três monômios em seus fatores primos nota-se logo que 2, a e x são os que entram como fatores na composição de todas elas, e por isso 2, a e x são os divisores comuns das três expressões. O máximo divisor comum é o produto continuado dêstes divisores, isto é, $2\times a\times x=$ $=2ax$.

Operação

$6abx=2\times3\times a\times b\times x.$
$10acx=2\times5\times a\times c\times x.$
$4adx=2\times2\times a\times d\times x.$
$2ax.$

Demonstração. Já vimos na secção **106**, pag. 47, que, se um número se dividir por dois ou mais primos entre si, dois a dois, se dividirá também por qualquer produto dêsses números. Assim, se 30 se divide por 2, por 3 e por 5, dividir-se-á também pelos varios produtos dêsses fatores, que são $2\times3=6$, $3\times5=15$ e $2\times3\times5=30$. Não sendo 30 divisível por nenhum outro número primo, segue-se que o produto continuado dos divisores 2, 3 e 5 será o seu máximo divisor.

Do mesmo modo, se os monômios $6abx$, $10acx$ e $4adx$ se dividem por 2, por a e por x, também serão divididos pelos produtos $2\times a=2a$, $2\times x=2x$ e $2\times a\times x=2ax$. Ora, como os três monômios não teem nenhum outro divisor primo e comum a eles senão 2, a e x, segue-se que o máximo divisor comum é $2\times a\times x=2ax$. Portanto,

O máximo divisor comum de dois ou mais monômios é o produto continuado de todos os fatores primos e comuns a êles.

Regra. *Decompõem-se os monômios dados em seus fatores primos, e o produto continuado de todos os fatores que forem comuns a êles, será o seu máximo divisor comum.*

Nota. Por abreviatura usaremos das iniciais **M. d. c.** para significar máximo divisor comum.

123. Problema. Qual é o **M. d. c.** de $4a^2x^2$, $6a^2x$ e $10a^3x$?

Solução. Os fatores comuns aos três monômios são 2, a, a e x. O fator a sendo duas vezes fator comum, $a\times a$ ou a^2 tambem o é, e o máximo divisor comum é $2a^2x$.

$4a^2x^2=2\times2\times a\times a\times x\times x.$
$6a^2x=2\times3\times a\times a\times x.$
$10a^3x=2\times5\times a\times a\times a\times x.$
$2\times a^2\times x=2a^2x.$

Achar o **M. d. c.** dos seguintes termos:

1. $4a^2x^2$ e $10ax^3$. Resp. $2ax^2$
2. $9abc^3$ e $12bc^4x$. » $3bc^3$.
3. $4a^3b^2x^5y^3$ e $8a^5x^2y^2$. » $4a^3x^2y^2$.
4. $3a^4y^3$, $6a^5x^3y^5$ e $9a^6y^4z$. » $3a^4y^3$.
5. $8ax^2y^4$, $12x^5y^2$ e $24a^2x^2y^3$. » ?
6. $3axy$, $15a^2x^3z$ e $5a^3x^2y$. » ?

Achar o máximo divisor comum de monômios por meio da divisão continuada

124. Podemos também achar o **M. d. c.** de dois ou mais monômios por meio da divisão continuada, isto é, por uma sucessão de divisões.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $30x$ e $42x$?

Solução. Dividindo $42x$ por $30x$, o quociente é 1, o resto é $12x$. Dividindo agora o primeiro divisor $30x$ pelo primeiro resto $12x$, o quociente é 2, e o resto $6x$. Dividindo ainda o segundo divisor pelo segundo resto, o quociente é 2, e não há resto.

O último divisor $6x$ é o **M. d. c.** de $30x$ e $42x$ porque não deixou resto.

Operação

```
            42x | 30x
            30x   1
      30x | 12x
      24x   2
12x | 6x
12x   2
 0
```

Demonstração. Temos de provar agora os dois pontos seguintes.

1.° Que $6x$ é um divisor comum de $30x$ e $42x$.

2.° Que $6x$ é o máximo divisor comum de $30x$ e $42x$.

Primeiro. Vamos provar que $6x$ é um divisor comum de $30x$ e $42x$. Pela última divisão do problema acima, vimos que $6x$ é contido 2 vezes em $12x$; ora, como $6x$ divide $12x$, dividirá também o produto de $12x \times 2$ ou $24x$. Também se $6x$ é divisor de si mesmo e de $24x$, será também divisor da soma de $6x+24x=30x$, que é um dos monômios dados.

Pela mesma razão, se $6x$ divide $12x$ e $30x$, dividirá a soma de $12x+$ $+30x=42x$, que é o outro termo. Logo $6x$ é um divisor comum de $30x$ e $42x$.

Segundo. Vamos agora provar que $6x$ é o maximo divisor comum de $30x$ e $42x$.

Se o máximo divisor comum não é $6x$ então é maior ou menor do que $6x$. Mas nós já provamos que $6x$ é um divisor comum das quantidades dadas, e por isso nenhuma quantidade menor do que $6x$ poderá ser o **M. d. c.** delas.

Supondo que o **M. d. c.** seja maior do que $6x$, então como êle divide $30x$ e $42x$ dividirá tambem a diferença de $42x-30x=12x$, e se divide $12x$, dividirá o produto de $12x \times 2=24x$.

Dividindo $24x$ e $30x$ dividirá a diferença destas quantidades que é $30x-24x=6x$. Ora $6x$, para não deixar fração no quociente, só pode ser dividido por si mesmo ou por uma quantidade menor do que $6x$. Logo, $6x$ é o maximo divisor comum de $30x$ e $42x$.

Regra. *Divide-se a quantidade maior pela menor; depois divide-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, e o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante até a divisão não deixar resto.*

O ultimo divisor será o máximo divisor comum.

Nota. Quando são dados mais de dois monômios acha-se o **M. d. c.** de dois dêles, depois o **M. d. c.** do divisor achado e do terceiro monômio, e assim por diante. De sorte que se quisermos achar o **M. d. c.** de $48a$. $72a$ e $108a$, acharemos primeiro o **M. d. c.** de $48a$ e $72a$ que é $24a$, e depois acharemos o **M. d. c.** de $24a$ e $108a$, que é $12a$. Assim, o **M. d. c.** de $48a$, $72a$ e $108a$ é $12a$.

Máximo divisor comum dos polinômios

125. Para acharmos o máximo divisor comum dos polinômios, podemos empregar os mesmos processos que já executámos para achar o máximo divisor comum dos binômios a saber:

1.° Decomposição dos polinômios em seus fatores primos.
2.° Divisão continuada dos polinômios.

Começaremos pelo primeiro.

Problema. Qual é o **M. d. c.** de $a^2-2ab+b^2$ e a^2-b^2?

Solução. A primeira expressão decompõe-se em $(a-b)(a-b)$, e a segunda, em $(a-b)(a+b)$; ora, como $(a-b)$ é o único divisor comum a ambas, é também o seu máximo divisor comum (Vêde o teorema segundo e o terceiro).

A regra, como é a mesma dos monômios, não é necessário ser aquí repetida.

Operação

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Achar o **M. d. c.** dos seguintes polinômios:

		Resp.
1.	$a^2+2ab+b^2$ e a^2-b^2.	$a+b$.
2.	x^2-y^2 e x^3+y^3.	» $x+y$.
3.	$a^2x^2-4ax+4$ e $ax-2$.	» $ax-2$.
4.	$4c^2-12cx+9x^2$ e $4c^2-9x^2$.	» ?
5.	x^5+y^5 e $x^2+2xy+y^2$.	» ?
6.	b^2-4 e b^2+4b+4.	» ?
7.	$5a^2+5ax$ e a^2-x^2.	» ?

126. Vamos achar agora o **M. d. c.** de dois polinômios por meio da divisão continuada dessas expressões.

Problema. Qual o **M. d. c.** de $4a^3—21a^2+15a+20$ e $a^2—6a+8$?

Solução. Dividindo-se a primeira pela segunda, o quociente é $4a+3$, e o resto é $a—4$. Dividindo-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, o quociente é $a—2$, e não deixa resto. O último divisor $a—4$ é o **M. d. c.** das duas quantidades.

Este processo apresenta às vezes muita dificuldade para os discípulos, principalmente quando é necessário omitir na divisão os fatores que não são comuns a todas as quantidades dadas. Por isso recomendamos de preferência o primeiro processo, ao qual juntámos os exercícios para a prática.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 4a^3—21a^2+15a+20 & a^2—6a+8 \\ 4a^3—24a^2+32a & 4a+3 \\ +\ 3a^2—17a+20 & \\ +\ 3a^2—18a+24 & \\ a—4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a^2—6a+8 & a—4 \\ a^2—4a & a—2 \\ —2a+8 & \\ —2a+8 & \\ 0\quad 0 & \end{array}$$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

127. Múltiplo de uma quantidade é qualquer outra quantidade que a contém um exato número de vezes. Assim, 6 é múltiplo de 2, porque contém 3 vezes o número 2; $20x$ é múltiplo de $5x$, porque contém 4 vezes $5x$.

128. Múltiplo comum de duas ou mais quantidades é uma outra quantidade que contém todas elas um exato número de vezes. Assim, $12y$ é múltiplo comum de $2y$, $3y$, $4y$ e $6y$, e porque contém 6 vezes $2y$, 4 vezes $3y$, 3 vezes $4y$ ou 2 vezes $6y$, e por isso pode dividir-se exatamente por todas estas expressões.

129. Mínimo múltiplo comum de duas ou mais quantidades é a menor quantidade que contém cada uma delas um exato número de vezes. Assim, $10x$ é o mínimo múltiplo comum de $2x$ e $5x$, porque nenhuma outra expressão menor do que $10x$, poderá conter exatamente estas quantidades um exato número de vezes.

130. Duas ou mais quantidades teem um número ilimitado de múltiplos comuns; assim, os múltiplos comuns de 4 e 6 são 12, 24, 36, 48, 60 e todos os números que forem crescendo nesta progressão. Ora, é evidente que 12 é o menor de todos, e por isso 12 é o mínimo múltiplo comum de 4 e 6.

131. Para que qualquer expressão algébrica contenha exatamente duas ou mais expressões, é necessário que ela contenha todos os diferentes fatores primos dessas expressões. E para ser a menor quantidade que exatamente as contenha, deve não ter nenhum outro fator além dos que tiverem essas quantidades; e, por isso, o *mínimo múltiplo comum de duas ou mais expressões tem todos os diferentes fatores primos dessas expressões e não contém nenhum outro fator.*

O mínimo múltiplo comum de a^2bc e acx é a^2bcx, porque tem todos os fatores de cada uma dessas quantidades, e não contém nenhum outro fator estranho.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciais **M. m. c.** para significar mínimo múltiplo comum.

Problema. Qual é o **M. m. c.** de a^2x, bx e abc?

Solução. Escrevem-se as expressões a^2x, bx e abc em linha e sublinham-se. Vê-se logo que o fator a é divisor de duas delas. Escreve-se a como divisor ao lado direito, e dividem-se as duas quantidades a^2x e abc pelo fator a, e os quocientes ax e bc, e a expressão bx, que não pode ser dividida por a, escrevem-se em baixo da linha para nova divisão.

Nestes novos termos vê-se que a é ainda fator de ax; divide-se então este termo por a e o quociente x escreve-se debaixo, bem como os termos que não podem ser divididos por a. Assim se continua a dividir todos os termos pelos seus divisores, até que todos fiquem reduzidos a 1.

Os fatores primos destas três expressões são a, a, b, c, e x; o mínimo múltiplo comum é pois o produto de todos estes fatores, isto é, $a\times a\times b\times c\times x=$ $=a^2bcx$.

Operação

a^2x,	bx,	abc	a
ax,	bx,	bc	a
x,	bx,	bc	b
x,	x,	c	c
x,	x,	1	x
1,	1,	1	

$$a\times a\times b\times c\times x=a^2bcx$$

Demonstração. Para que a^2bcx seja o mínimo múltiplo comum de a^2x, bx e abc, é necessário que contenha todos os fatores primos destas três expressões, e nenhum outro fator além dêles. Examinando estas três expressões, vemos que os seus diferentes fatores são a, a, b, c, e x. Ora, todos estes fatores se acham contidos em a^2bcx; além disso vemos também que esta expressão não tem nenhum outro fator além de a, a, b, c e x, logo a^2bcx é o menor múltiplo comum de a^2x, bx e abc.

Regra. *Para se achar o* **M. m. c.** *de duas ou mais expressões, escrevem-se todas em linha separadas por virgulas*

e sublinham-se. Acha-se um fator primo que divida exatamente uma dessas expressões, e escrevem-se debaixo os quocientes, bem como as expressões que não forem divisíveis por êle.

Divide-se esta nova linha de expressões por um fator primo, que divida uma ou mais expressões, e assim se procede em seguida; e as expressões primas dividem-se por si mesmas, para que todos os fatores fiquem à direita, e todos os quocientes sejam 1. *O continuado produto de todos os fatores primos será o* **M. m. c.**

Nota. Quando duas ou mais quantidades são, duas a duas, primas entre si, o **M. m. c.** de todas elas é o seu produto continuado. Assim, o **M. m. c.** de ab, cd e xy é $abcdxy$.

O discípulo deve estudar êste processo em nossa Aritmética Progressiva, para saber achar fàcilmente o mínimo múltiplo comum dos números.

Achar o mínimo múltiplo comum.

1.	de $4a^2$, $3a^3x$ e $6ax^2y^3$.	Resp.	$12a^3x^2y^3$.
2.	de $12a^2x^2$, $6a^3$ e $8x^4y^2$.	»	$24a^3x^4y^2$.
3.	de $18c^2nz^2$, $9n^4z$ e $12c^3n^4z^3$.	»	$36c^3n^4z^3$.
4.	de 15, $6xz^2$, $9x^2z^4$ e $18cx^3$.	»	$90cx^3z^4$.
5.	de $6a$, $5a^2b$ e $25abc^2$.	»	?
6.	de $3a^2b$, $9abc$ e $27a^2x^2$.	»	?
7.	de $4a^2x^2y^2$, $8a^3xy$, $16a^4y^3$ e $23a^5y^4$.	»	?
8.	de $3a^3b^2$, $9a^2x^2$, $18a^4y^3$ e $3a^2y^2$.	»	?

FRAÇÕES ALGÉBRICAS

132. Em Aritmética, uma fração é uma ou mais partes iguais de uma unidade ou de um todo.

133. Exprime-se a fração com dois números separados por um risco horizontal.

134. Estes dois números chamam-se **termos** da fração; o termo de baixo chama-se **denominador**, e mostra em quantas partes foi dividida a unidade; o termo de cima chama-se **numerador**, e mostra quantas partes da unidade contém a fração. Assim, $\frac{3}{4}$ mostra que a unidade foi dividida em 4 partes iguais, e que a fração contém 3 dessas partes.

Numerador 3
Denominador 4

135. Uma fração é considerada também como o quociente exato de uma divisão, na qual o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor. Assim, se dividirmos 3 por 4, o quociente será $\frac{3}{4}$, isto é, a quarta parte de 3, e por isso esta fração também se lê: «*três dividido por quatro*».

É com esta última significação que a Algebra considera as frações.

136. A fração exprime, pois, o resultado da divisão do numerador pelo denominador e lê-se como se estes termos estivessem separados pelo sinal ÷. Assim,

$\frac{a}{b}$ lê-se: «a dividido por b».

$\frac{2a+x}{6c}$ lê-se: «dois a e mais x divididos por seis c».

$\frac{2d}{x-y}$ lê-se: «dois d divididos por x e menos y».

137. Uma quantidade se diz **inteira,** em Álgebra, quando não contém denominador ou si neste só figuram números; por exemplo: 7, $3ab$, $15x$, $\frac{2y}{2}$, $\frac{4x+3}{5}$, etc.

138. Uma quantidade se diz **fracionária** em Álgebra quando contém letras no denominador; por exemplo: $\frac{x}{y}$, $\frac{3a}{2b}$, $4a-\frac{5}{z}$, etc.

139. Há cinco teoremas que são comuns às frações algébricas e às frações aritméticas, e por isso devemos conhecê-los perfeitamente. Estes teoremas são os seguintes:

140. Teorema I. *Se multiplicarmos o numerador por um número, sem alterarmos o denominador, o valor da fração ficará multiplicado por êsse número.*

141. Teorema II. *Se dividirmos o numerador de uma fração por um número, sem alterarmos o denominador, o valor da fração fica dividido por êsse número.*

142. Teorema III. *Se multiplicarmos o denominador de uma fração por um número, sem alterarmos o numerador, o valor da fração ficará dividido por êsse número.*

143. Teorema IV. *Se dividirmos o denominador de uma fração por um número, sem alterarmos o numerador, o valor da fração virá multiplicado por êsse número.*

144. Teorema V. *Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fração por um mesmo número, mu-*

daremos a forma dessa fração, mas não lhe alteraremos o valor.

145. Antes de entrarmos nos diversos processos das frações algébricas, devemos conhecer perfeitamente as transformações seguintes:

1.° Reduzir frações à expressão mais simples.

2.° Dar às frações a forma de quantidades inteiras ou mistas.

3.° Dar às quantidades inteiras ou mistas a forma de frações.

4.° Reduzir frações ao mínimo denominador comum.

Reduzir frações algébricas à expressão mais simples

146. Reduzir uma fração algébrica à sua expressão mais simples é cancelar ou suprimir os fatores comuns ao numerador e denominador, para torná-la mais simples, mas com o mesmo valor.

147. As frações algébricas que tiverem fatores comuns ao numerador e ao denominador, podem ser reduzidas a uma expressão mais simples; assim, $\frac{ax}{ay}$ pode ser reduzida a $\frac{x}{y}$, porque o fator a é comum a ambos os termos. As frações que não tiverem fatores comuns, não podem ser reduzidas; assim, $\frac{a}{b}$ e $\frac{ax}{by}$ não podem ser simplificadas.

148. Problema. Reduzir $\frac{5ab^2}{15abx^2}$ à sua expressão mais simples.

Solução. Decompondo os dois termos da fração em seus fatores primos vemos que os fatores 5, a e b são comuns ao numerador e ao denominador. Concelando estes fatores comuns a fração ficará reduzida a $\frac{b}{3x^2}$.

$$\frac{5ab^2}{15abx^2}=$$

$$=\frac{5\times a\times b\times b}{3\times 5\times a\times b\times x\times x}=\frac{b}{3x^2}$$

Demonstração. Cancelar no numerador os fatores 5, a e b é o mesmo que dividir êste termo por $5ab$. Cancelar também no denominador os fatores 5, a e b é o mesmo que dividí-lo por $5ab$. Ora, dividindo-se ambos os termos de uma fração por um mesmo fator, não se altera o valor da fração (n.° **144**).

Na solução dêste problema, vemos que 5, a e b são os únicos fatores primos comuns ao numerador e ao denominador, e por isso o produto

$5ab$ é o **M. d. c.** dos dois termos da fração (n. **124**). Temos portanto as duas regras seguintes para a redução de frações.

Regra. *Para se reduzir uma fração algébrica à sua expressão mais simples, cancelam-se todos os fatores comuns ao numerador e ao denominador.*

Ou então

Dividem-se ambos os termos da fração pelo seu máximo divisor comum.

Reduzir cada uma das seguintes frações à sua expressão mais simples:

1.	$\frac{4a^2x^2}{6a^4}$.	Resp.	$\frac{2x^2}{3a}$.	7.	$\frac{3xy}{9x^2y}$.	Resp.	?
2.	$\frac{6a^2x^2}{8ax^3}$.	»	$\frac{3a}{4x}$.	8.	$\frac{12a^2bc^2}{4abcd}$.	»	?
3.	$\frac{6a^4x^2}{8a^2xy^4}$.	»	$\frac{3a^2x}{4y^4}$.	9.	$\frac{17b^2cxy}{51b^2cxy}$.	»	?
4.	$\frac{9x^4y^3z^5}{12x^3y^4z^5}$.	»	$\frac{3x}{4y}$.	10.	$\frac{60a^2b^3c^2d^2}{48a^3b^4c^3d}$.	»	?
5.	$\frac{4abcy}{12abc}$.	»	$\frac{y}{3}$.	11.	$\frac{12a^4b^2x}{18a^3b^2y}$.	»	?
6.	$\frac{18a^2b}{3ac}$.	»	$\frac{6ab}{c}$.	12.	$\frac{4ax^2}{5a^2bx^2}$.	»	?

13. Simplificar $\frac{4a^2+6a^4}{10a^3b^2+8a^2c}$ Resp. $\frac{4a^2+6a^4}{10a^3b^2+8a^2c}=\frac{2a^2(2+3a^2)}{2a^2(5ab^2+4c)}=\frac{2+3a^2}{5ab^2+4c}$

14. Simplificar $\frac{2a^2cx^2+2acx}{10ac^2x}$. Resp. $\frac{ax+1}{5c}$.

15. Simplificar $\frac{8a^2b}{12ab^2+4abc}$. » $\frac{2a}{3b+c}$.

16. Simplificar $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$. » $\frac{x+y}{x-y}$.

17. Simplificar $\frac{a+1}{a^2+2a+1}$. » $\frac{1}{a+1}$.

18. Simplificar $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$. » $\frac{a+b}{a-b}$.

Transformar frações algébricas em expressões inteiras ou mistas

149. Muitas vezes uma expressão algébrica tem a fórma de uma fração, mas é uma expressão inteira ou mista; é necessário pois saber dar a esta expressão forma inteira ou mista.

Problema. Transformar $\frac{3ax+b2}{x}$ em uma expressão inteira ou mista.

Solução. Desde que o numerador é um dividendo, e o denominador um divisor, divide-se aquele por êste, isto é, divide-se $3ax+b^2$ por x; o quociente $3a$ será a parte inteira. O resto b^2 como não se pode dividir por x, escreve-se em forma de fração e junta-se à parte inteira, que ficará $3a+\frac{b^2}{x}$.

Operação

$$\begin{array}{r|l} 3ax+b^2 & x \\ \hline 3ax & 3a+\frac{b^2}{x} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Regra. *Divide-se o numerador pelo denominador; o quociente será a parte inteira; se houver resto, escreve-se sôbre o divisor como parte fracionária, e junta-se à parte inteira.*

Reduzir as seguintes frações a quantidades inteiras ou mistas:

1. $\frac{ab+b^2}{a}$. Resp. $b+\frac{b^2}{a}$.
2. $\frac{cd-d^2}{d}$. » $c-d$.
3. $\frac{a^2-x^2}{a+x}$. » $a-x$.
4. $\frac{2a^2x-x^3}{a}$. » $2ax-\frac{x^3}{a}$.
5. $\frac{4ax-2x^2-a^2}{2a-x}$. » $2x-\frac{a^2}{2a-x}$.
6. $\frac{ax-x^2}{x}$. » $a-x$.
7. $\frac{ax-a^2}{a}$. Resp. ?
8. $\frac{ab-2a^2}{b}$. » ?
9. $\frac{a^2-x^2}{a+x}$. » ?
10. $\frac{x^3-y^3}{x-y}$. » ?
11. $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$. » ?
12. $\frac{2a+4b+c}{2}$. » ?

Dar a uma expressão mista a forma de fração

150. Problema. Transformar $a+\frac{b}{c}$ em uma fração.

Solução. Multiplicando-se a parte inteira pelo denominador da fração ficará ac, isto é, c vezes maior; mas dando-se-lhe o denominador c, ficará com o seu valor primitivo, e na forma de fração. Juntando-se agora a fração $\frac{b}{c}$, ficará $\frac{ac+b}{c}$.

Operação

$$a+\frac{b}{c}=$$
$$=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

Regra. *Multiplica-se a parte inteira pelo denominador da fração, e junta-se ao numerador com o sinal competente, e o resultado escreve-se sôbre o denominador.*

151. Antes de resolvermos os exercicios deste processo, precisamos refletir sôbre o modo por que temos de operar com os sinais das frações, para não acharmos dificuldade alguma.

Os sinais prefixos a um termo de uma fração dominam só êsse termo; e o sinal prefixo à fração domina a fração inteira. Assim, na fração $-\frac{a^2-b^2}{x+y}$, o sinal de a^2 que é o primeiro termo do numerador, é *mais* subentendido; o sinal de b^2 é *menos*; o sinal de ambos os termos do denominador é *mais*; mas o sinal da fração, tomada como um todo, é *menos*.

Como uma fração pode estar unida à parte inteira pelo sinal *mais* ou pelo sinal *menos*, precisamos saber operar com os sinais, quando dermos a uma quantidade mista uma forma fracionária.

Vamos resolver os dois casos seguintes:

1.º Caso. Transformar $3a+\frac{ax-a}{x}$ em uma fração.

Solução. Neste caso, como o sinal que liga a fração à parte inteira é +, não há dificuldade alguma, porque os sinais dos termos da fração se conservam.

$$3a+\frac{ax-a}{x}=\frac{3ax}{x}+\frac{ax-a}{x}=\frac{3ax+ax-a}{x}=\frac{4ax-a}{x}.$$

2.º Caso. Transformar $4a-\frac{a-b}{3c}$ em uma fração.

$$4a-\frac{a-b}{3c}=\frac{12ac}{3c}-\frac{a-b}{3c}=\frac{12ac-(a-b)}{3c}=\frac{12ac-a+b}{3c}.$$

Solução. Neste caso, como a fração está unida à parte inteira pelo sinal —, é necessário que, quando juntarmos o numerador da fração ao numerador da parte inteira, troquemos os sinais de todos os termos do numerador da fração (Vêde n. 63).

Transformar em frações:

1. $5c+\frac{a-b}{2x}$. Resp. $\frac{10cx+a-b}{2x}$.
2. $5c-\frac{a-b}{2x}$. » $\frac{10cx-a+b}{2x}$.
3. $3x+\frac{c-d}{xy}$. » $\frac{3x^2y+c-d}{xy}$.
4. $3x-\frac{4x^2-5}{5x}$. » $\frac{11x^2+5}{5x}$.
5. $8y+\frac{3a-y^2}{5y}$. » $\frac{39y^2+3a}{5y}$.
6. $x+y+\frac{x}{x+y}$. » $\frac{x^2+2xy+y^2+x}{x+y}$.
7. $z-1+\frac{1-a}{1\pm z}$. » $\frac{z^2-a}{z+1}$.
8. $\frac{4y}{2x+z}-5$. » $\frac{4y-10x-5z}{2x+z}$.

9. $3a^2x - \frac{a^2x^2-a^3}{x}$. » $\frac{2a^2x^2+a}{x}$.

10. $a+x+\frac{a^2+x^2}{a-x}$. » $\frac{2a^2}{a-x}$.

152. Problema. Transformar $5x$ em uma fração com o denominador ab.

Solução. $5x$ transformado em uma fração fica $\frac{5x}{1}$; multiplicando agora ambos os termos desta fração por ab, temos $\frac{5abx}{ab}$.

Já sabemos que multiplicando-se ambos os termos de uma fração por um mesmo número, não se altera o valor da fração; logo $5x = \frac{5abx}{ab}$.

Operação

$$5x = \frac{5x}{1}$$

$$\frac{5x}{1} \times \frac{ab}{ab} = \frac{5abx}{ab}$$

Regra. *Transforma-se a quantidade inteira em uma fração com o denominador 1, e multiplicam-se ambos os seus termos pelo denominador dado.*

1. Transformar $3ax$ em uma fração que tenha o denominador b. Resp. $\frac{3abx}{b}$.

2.° Transformar $3xy$ em uma fração que tenha o denominador $2a$. Resp. $\frac{6axy}{2a}$.

3.° Transformar $a+b$ em uma fração que tenha o denominador $a-b$. Resp. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

4. Transformar $2x^2y$ em uma fração que tenha o denominador $3a^2-2b$. Resp. $\frac{6a^2x^2y-4bx^2y}{3a^2-2b}$.

153. Reduzir duas ou mais frações a um denominador comum é dar a todas um denominador igual sem lhes alterar o valor.

Esta redução é baseada no seguinte princípio já demonstrado na Aritmética e aqui lembrado no n.° **144:**

Multiplicando-se ambos os termos de uma fração pelo mesmo número, o valor da fração não se altera.

154. Tomando as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{x}{y}$, vemos que elas teem denominadores diferentes; multiplicando agora ambos os termos de $\frac{a}{b}$ por y, no que não lhe alteraremos o seu valor, teremos $\frac{ay}{by}$; multiplicando também ambos os termos de $\frac{x}{y}$ por b, teremos $\frac{bx}{by}$. Deste modo obteremos as duas frações $\frac{ay}{by}$ e $\frac{bx}{by}$, do mesmo valor que as primeiras, e com denominadores iguais.

Neste exemplo, vemos que o denominador comum deve ser múltiplo dos denominadores dados, pois by é múltiplo de b e de y.

Problema. Reduzir $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{x}{y}$ a um denominador comum.

Solução. O denominador comum é $b \times d \times y = bdy$.

Multiplicando o numerador da primeira fração pelos denominadores das outras, teremos ady que é o numerador correspondente à primeira fração. Multiplicando o numerador da segunda fração pelos denominadores das outras, teremos $c \times b \times y = bcy$ que é o numerador correspondente à segunda fração. Multiplicando o numerador da terceira fração pelos denominadores das outras, teremos $x \times b \times d = bdx$, que é o numerador correspondente à terceira fração.

Operação

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{c}{d}, \quad \frac{x}{y}.$$

$$\frac{ady}{bdy}, \quad \frac{bcy}{bdy}, \quad \frac{bdx}{bdy}.$$

Regra. *Multiplicam-se entre si os denominadores, e o produto será o denominador comum.*

Multiplica-se depois o numerador de cada fração pelos denominadores das outras; e o produto será o numerador correspondente a essa fração.

Reduzir cada um dos seguintes grupos de frações a um denominador comum:

1. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{1}{2}$. Resp. $\frac{2ad}{2bd}$, $\frac{2bc}{2bd}$ e $\frac{bd}{2bd}$.
2. $\frac{x}{y}$ e $\frac{a+x}{c}$. » $\frac{cx}{cy}$ e $\frac{xy+ay}{cy}$.
3. $\frac{2}{3}$, $\frac{3a}{4}$ e $\frac{x+y}{b}$. » $\frac{8b}{12b}$, $\frac{9ab}{12b}$, $\frac{12x+12y}{12b}$.
4. $\frac{2x}{3y}$, $\frac{3x}{5z}$ e a. » $\frac{10xz}{15yz}$, $\frac{9xy}{15yz}$ e $\frac{15ayz}{15yz}$.
5. $\frac{a}{x}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{z}$. » $\frac{ayz}{xyz}$, $\frac{x^2z}{xyz}$ e $\frac{xy^2}{xyz}$.
6. $\frac{a}{c}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{3}{4}$. Resp. ?
7. $\frac{c}{d}$, $\frac{b}{x}$ e $\frac{d}{4}$. » ?
8. $\frac{2a}{3b}$ e $\frac{x}{a+b}$. » ?
9. $\frac{xy}{z}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2a}{b}$. » ?

Achar o mínimo denominador comum

155. Já sabemos achar um denominador comum, mas não sabemos ainda achar o menor de todos, isto é, **o mínimo denominador comum** que tem a grande vantagem de deixar as frações reduzidas a seus termos mais simples.

156. Quando os denominadores das frações dadas são dois a dois primos entre si, o mínimo denominador comum de todas elas é o seu produto continuado, como fizemos na secção n.º **154**. Assim, nas frações $\frac{a}{b}$, $\frac{2}{x}$ e $\frac{c}{y}$, o mínimo denominador comum é $b \times x \times y = bxy$. Mas, quando as frações teem denominadores com fatores comuns, o produto continuado desses fatores não é o seu mínimo denominador comum. Assim, nas frações $\frac{a}{xy}$, $\frac{b}{xz}$ e $\frac{c}{yz}$, o mínimo denominador comum não é $xy \times xz \times yz = xxyyzz$ ou $x^2y^2z^2$, mas sim xyz; pois desde que o denominador comum de dois ou mais denominadores dados é um múltiplo dessas quantidades, segue-se que o mínimo denominador deve ser o seu mínimo múltiplo comum (Vêde o **n.º 129**).

Problema. Reduzir $\frac{a}{xy}$, $\frac{b}{xz}$ e $\frac{c}{yz}$ ao mínimo denominador comum.

Solução. Acha-se o mínimo múltiplo comum dos denominadores xy, xz e yz (**n. 131**). O mínimo multiplo comum é xyz que se escreve como denominador comum das três frações do seguinte modo:

$$\frac{\quad}{xyz},\ \frac{\quad}{xyz},\ \frac{\quad}{xyz}.$$

Divide-se êsse denominador comum pelo denominador da primeira fração, e o quociente multiplica-se pelo seu numerador, e obtém-se $xyz \div xy = z$; então $z \times a = az$ que é numerador correspondente à primeira fração. Os numeradores das outras frações acham-se por um processo idêntico. Assim,
$xyz \div xz = y$, então $y \times b = by$, numerador da 2.ª fração.
$xyz \div yz = x$; então $x \times c = cx$, numerador da 3.ª fração.

Operação

$$\frac{a}{xy},\ \frac{b}{xz},\ \frac{c}{yz}.$$

$$\frac{az}{xyz},\ \frac{by}{xyz},\ \frac{cx}{xyz}.$$

Regra. *Acha-se o mínimo múltiplo comum dos denominadores, e escreve-se como denominador comum das frações dadas.*

Divide-se êste denominador comum pelo denominador de cada fração e o quociente multiplicado pelo numerador primitivo dará o numerador correspondente.

Reduzir as frações de cada um dos seguintes grupos ao seu mínimo denominador comum:

		Respostas
1.	$\frac{cd}{ab}$, $\frac{2x}{3a}$ e $\frac{xy}{ac}$.	$\frac{3c^2d}{3abc}$, $\frac{2bcx}{3abc}$ e $\frac{3bxy}{3abc}$.
2.	$\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ e $\frac{x}{y}$.	$\frac{6ay}{12y}$, $\frac{4by}{12y}$, $\frac{3cy}{12y}$ e $\frac{12x}{12y}$.
3.	$\frac{2a}{3bc}$, $\frac{3x}{cd}$ e $\frac{5y}{6bd}$.	$\frac{4ad}{6bcd}$, $\frac{18bx}{6bcd}$ e $\frac{5cy}{6bcd}$.
4.	$\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{-y}{x+y}$ e $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.	$\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$, $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$ e $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.
5.	$\frac{a^2c}{ab}$, $\frac{2cd}{b^2c}$ e $\frac{x^2y}{bc}$	?
6.	$\frac{2a}{4b}$, $\frac{cd}{bc}$ e $\frac{x^2y}{bcx}$.	?
7.	$\frac{m+n}{3a^2}$, $\frac{m-n}{2ax^2}$ e $\frac{m^2}{4cx}$.	?
8.	$\frac{x}{ac}$, $\frac{m}{b^2c}$ e $\frac{y}{c^2d}$.	?

Adição de frações

157. Quando duas ou mais frações teem um denominador comum, representam vários números de partes iguais da mesma unidade, ou do mesmo todo; neste caso, para se achar a soma destas frações, bastará adicionar os seus numeradores. Assim, $\frac{2}{7}$ mais $\frac{3}{7}$ são $\frac{5}{7}$; do mesmo modo, $\frac{2x}{y} + \frac{3x}{y} = \frac{5x}{y}$.

Problema. Qual é a soma de $\frac{7b}{m}$, $\frac{4b}{m}$, $\frac{8b}{m}$.

Solução. Como as três frações teem um denominador comum, adicionam-se os numeradores que são $7b+4b+8b=19b$, e a soma $19b$ escreve-se sôbre o denominador comum.

Operação

$$\frac{7b}{m} + \frac{4b}{m} + \frac{8b}{m} = \frac{19b}{m}$$

Regra. *Adicionam-se os numeradores, e a soma escreve-se sôbre o denominador comum.*

Problema. Qual é a soma de $\frac{x}{2}$, $\frac{3y}{z}$, $\frac{5a}{3b}$?

Solução. Como os denominadores são diferentes, temos de reduzir primeiro as três frações a um denominador comum, e depois procederemos como no problema precedente.

Operação

$$\frac{x}{2}+\frac{3y}{z}+\frac{5a}{3b}=\frac{3bxz}{6bz}+\frac{18by}{6bz}+\frac{10az}{6bz}=$$

$$=\frac{3bxz+18by+10az}{6bz}$$

Regra. *Reduzem-se as frações a um denominador comum, e depois escreve-se a soma dos numeradores sôbre êle.*

Exercícios para somar:

		Respostas
1.	$\frac{3x}{a}+\frac{5z}{a}+\frac{2b}{a}=?$	$\frac{3x+5z+2b}{a}$
2.	$\frac{3ac}{2xy}+\frac{11ac}{2xy}+\frac{8ac}{2xy}+\frac{5ac}{2xy}=?$	$\frac{27ac}{2xy}$.
3.	$\frac{2b+c}{x}+\frac{3b-c}{x}=?$	$\frac{5b}{x}$.
4.	$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{6}=?$	a.
5.	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=?$	$\frac{6x+4y+3z}{12}$.
6.	$\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}+\frac{5x}{6}=?$	$\frac{143x}{60}=2x+\frac{23x}{60}$.
7.	$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=?$	x.
8.	$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=?$	$\frac{2a}{a^2-b^2}$.
9.	$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=?$	?
10.	$\frac{5+x}{y}+\frac{3-ax}{ay}+\frac{b}{3a}=?$	?
11.	$2x+3x+\frac{3z}{5}+x+\frac{2z}{9}=?$	$6x+\frac{37z}{45}$.
12.	$3+\frac{2a}{x}+5+\frac{3a}{x}=?$	?

Subtração de frações

158. Quando duas frações teem um denominador comum, opera-se a subtração achando a diferença entre os numeradores. Assim, de $\frac{3a}{c}$ subtraindo $\frac{2a}{c}$, resta $\frac{a}{c}$.

Problema. De $\frac{a}{b}$ subtraindo $\frac{c}{d}$ quanto resta?

Solução. Como as duas frações teem um denominador comum, acha-se a diferença entre a e c que é $a-c$, e escreve-se sôbre b, e ficará $\frac{a-c}{b}$.

Operação

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Problema. Subtrair $\frac{3a}{2y}$ de $\frac{7a}{3x}$.

Solução. Reduzidas as frações a um denominador comum, temos $\frac{14ay-9ax}{6xy}$

Operação

$$\frac{7a}{3x}-\frac{3a}{2y}=?$$

$$\frac{14ay}{6xy}-\frac{9ax}{6xy}=\frac{14ay-9ax}{6xy}$$

Regra. *Reduzem-se as frações a um denominador comum, e subtrai-se o numerador do subtraendo do numerador do minuendo, e a diferença escreve-se sôbre o denominador comum.*

Exercícios para resolver:

1.	De $\frac{5y}{8}$ subtrair $\frac{3y}{8}$.	Resp.	$\frac{2y}{8}=\frac{y}{4}$.
2.	De $\frac{a}{2}$ subtrair $\frac{a}{3}$.	»	$\frac{a}{6}$.
3.	De $\frac{3x}{4}$ subtrair $\frac{2x}{3}$.	»	$\frac{x}{12}$
4.	De $\frac{a+b}{2}$ subtrair $\frac{a-b}{2}$.	»	b.
5.	De $\frac{2ax}{3}$ subtrair $\frac{5ax}{3}$.	»	$\frac{-3ax}{3}=-ax$.
6.	De $\frac{3}{4a}$ subtrair $\frac{5}{2x}$.	»	$\frac{3x-10a}{4ax}$.
7.	De $\frac{3a}{4x}$ subtrair $\frac{4x}{3a}$.	»	$\frac{9a^2-16x^2}{12ax}$.
8.	De $\frac{x+y}{x-y}$ subtrair $\frac{x-y}{x+y}$.	»	$\frac{4xy}{x^2-y^2}$.
9.	De $\frac{2a+b}{5c}$ subtrair $\frac{3a-b}{7c}$.	»	?
10.	De $5x+\frac{x}{b}$ subtrair $2x-\frac{x-b}{c}$	»	?
11.	De $\frac{1}{a-b}$ subtrair $\frac{1}{a+b}$.	»	?
12.	De $\frac{a+3d}{4}$ subtrair $\frac{3a-2d}{3}$.	»	?

Multiplicação de frações

159. Multiplicar uma fração por uma quantidade inteira.

1.º Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por m.

Solução. Multiplicando-se o numerador a pela quantidade m, o produto é am que se escreve sôbre o denominador b, e ficará $\frac{am}{b}$.

Operação

$$\frac{a}{b} \times m = \frac{a \times m}{b} = \frac{am}{b}$$

2.º Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{bx}$ por x.

Solução. Divide-se o denominador bx por x, e a fração ficará $\frac{a}{b}$. Este modo só é praticável quando o denominador se divide exatamente pela quantidade inteira.

Operação

$$\frac{a}{bx} \times x = \frac{a}{bx \div x} = \frac{a}{b}$$

Regra. *Multiplica-se o numerador pela quantidade inteira, e o produto escreve-se sôbre o denominador.* Ou

Divide-se o denominador pela quantidade inteira, quando é divisível por ela.

Operar as seguintes multiplicações:

		Respostas
1.	Multiplicar $\frac{2a}{bc}$ por ad.	$\frac{2a^2d}{bc}$
2.	Multiplicar $\frac{ab}{24}$ por 6.	$\frac{ab}{4}$.
3.	Multiplicar $\frac{ab}{cd}$ por d.	$\frac{ab}{c}$.
4.	Multiplicar $\frac{a+b}{c}$ por xy.	$\frac{axy+bxy}{c}$.
5.	Multiplicar $\frac{b-c}{d}$ por $b+c$.	$\frac{b^2-c^2}{d}$
6.	Multiplicar $\frac{3x^2}{10y}$ por $5y$.	$\frac{3x^2}{2}$.
7.	Multiplicar $\frac{4c}{2a+c}$ por $a-2b$.	$\frac{4ac-8bc}{2a+c}$.
8.	Multiplicar $\frac{b+c}{b-c}$ por $a+c$.	$\frac{ab+ac+bc+c^2}{b-c}$.
9.	Multiplicar $\frac{a-b}{c+d}$ por $c+d$.	$a-b$.
10.	Multiplicar $\frac{a}{c}$ por c.	a.
11.	Multiplicar $\frac{2a+3xz}{a^2b}$ por ab.	$\frac{2a+3xz}{a}$.
12.	Multiplicar $\frac{2x+3}{5}$ por $2ax$.	$\frac{4ax^2+6ax}{5}$.

160. Multiplicar uma fração por outra.

Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Solução. Multiplicando entre si os numeradores, temos $a \times c = ac$; multiplicando os denominadores, temos $b \times d = bd$. O produto das duas frações é $\frac{ac}{bd}$.

Operação

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Demonstração. Se multiplicarmos $\frac{a}{b}$, por c, o produto será $\frac{ac}{b}$; mas o multiplicador não é c, e sim $\frac{c}{d}$; por isso, o produto $\frac{ac}{b}$ é d vezes maior do que deve ser. Multiplicando agora o denominador de $\frac{ac}{b}$ por d, tornaremos d vezes menor o valor da fração, e então dará $\frac{ac}{bd}$ o produto pedido.

Regra. *Multiplicam-se entre si os numeradores, depois os denominadores, e divide-se o primeiro produto pelo segundo.*

Nota. Para se multiplicar uma fração por uma expressão mista, reduz-se a expressão mista a uma fração, e segue-se a regra acima. Se a fração resultante fôr redutível, simplifica-se, para que o produto fique na sua expressão mais simples.

Operar as seguintes multiplicações:

		Respostas			Respostas
1.	$\frac{3a}{4} \times \frac{5x}{8} = ?$	$\frac{15ax}{32}$.	7.	$\frac{2x}{y} \times \frac{x}{2d} \times \frac{b}{y} = ?$	$\frac{bx^2}{dy^2}$.
2.	$\frac{4a}{5x} \times \frac{3x}{7a} = ?$	$\frac{12}{35}$.	8.	$\frac{a-b}{2} \times \frac{2}{a^2-b^2} = ?$	
3.	$\frac{2a}{3} \times \frac{4a}{5} = ?$	$\frac{8a}{15}$.	9.	$\frac{2x}{a} \times \frac{3ab}{c} \times \frac{3ac}{2b} = ?$	
4.	$\frac{3x^2}{10y} \times \frac{5y}{9x} = ?$	$\frac{x}{6}$.	10.	$\left(x+\frac{2xy}{x-y}\right)\left(x-\frac{2xy}{x+y}\right) = ?$	
5.	$\frac{3(a+x)}{2} \times \frac{4x}{a+x} = ?$	$6x$.	11.	$\frac{a}{a-b} \times \frac{b}{a+b} = ?$	
6.	$\frac{2x+3}{5} \times \frac{10x}{7} = ?$	$\frac{4x^2+6x}{7}$.	12.	$\left(b+\frac{bx}{a}\right)\frac{a}{x} = ?$	

161. Quando os numeradores e denominadores teem fatores comuns, cancelam-se êsses fatores antes da multiplicação, e dêste modo, obtém-se um produto já simplificado.

Problema. Qual é o produto de $\frac{b}{x} \times \frac{y}{b} \times \frac{x}{2a}$?

Solução. Como o fator b é comum ao numerador da primeira fração e ao denominador da segunda, concela-se este fator nos dois lugares, e o mesmo se faz com o fator x. O resultado da multiplicação é $\frac{y}{2a}$.

Operação

$$\frac{\not b}{\not x} \times \frac{y}{\not b} \times \frac{\not x}{2a} = \frac{y}{2a}.$$

Problema. Multiplicar $\frac{9a}{15y}$ por $\frac{5b}{2a}$.

Solução. Decompondo-se os dois numeradores e os dois denominadores, e cancelando-se os fatores comuns 3, 5 e a, obtém-se logo o produto simplificado.

$$\frac{9a}{15y} \times \frac{5b}{2a} = \frac{\not{3} \times 3 \times \not{a} \times \not{5} \times b}{\not{3} \times \not{5} \times y \times 2 \times \not{a}} = \frac{3b}{2y}.$$

1. Operar $\frac{2a}{3} \times \frac{4a}{5} \times \frac{5}{2a} \times \frac{6}{x}$. Resp. $\frac{8a}{x}$.
2. Operar $\frac{a+b}{a-b} \times \frac{a-b}{a+b}$. » 1.
3. Operar $\frac{xyz}{x^4+y^4} \times \frac{x^4+y^4}{xyz}$. » ?
4. Operar $\frac{18x}{15y} \times \frac{3ab}{36x} \times \frac{2a}{c}$. » ?

Divisão de frações

162. A divisão de uma fração por uma quantidade inteira pode ser operada por duas formas: ou dividindo-se o numerador ou multiplicando-se o denominador, como já foi demonstrado nas secções **141** e **142.**

Vamos resolver dois exemplos para o discípulo não achar dificuldade alguma nas operações.

Dividindo-se o numerador:

$$\frac{ay}{m} \div y = \frac{ay \div y}{m} = \frac{a}{m}$$

$$\frac{18ac}{by} \div 3a = \frac{18ac \div 3a}{by} = \frac{6c}{by}.$$

Multiplicando-se o denominador:

$$\frac{ay}{m} \div y = \frac{ay}{m \times y} = \frac{ay}{my} = \frac{a}{m}.$$

$$\frac{18ac}{by} \div 3a = \frac{18ac}{by \times 3a} = \frac{18ac}{3aby} = \frac{6c}{by}.$$

Regra. *Divide-se o numerador pelo divisor, e se não fôr divisível, multiplica-se o denominador pelo divisor, e escreve-se o numerador sôbre o resultado.*

1. Dividir $\frac{6a^2b}{7n}$ por $3ab$. Resp. $\frac{2a}{7n}$.
2. Dividir $\frac{15a^3c^2}{17bd}$ por $3a^2c$. » $\frac{5ac}{17bd}$.
3. Dividir $\frac{14ac^3m^2}{11xy}$ por $7acm^3$. » $\frac{2c^2}{11xy}$.
4. Dividir $\frac{35b^3d^2}{13ac^2}$ por $5b^3d$. » $\frac{7d}{13ac^2}$.

5. Dividir $\frac{a^2+ab}{3+2x}$ por a. Resp. $\frac{a+b}{3+2x}$
6. Dividir $\frac{c^2+cd}{5}$ por $c+d$. » $\frac{c}{5}$.
7. Dividir $\frac{x^2+2xy+y^2}{c+d}$ por $x+y$. » $\frac{x+y}{c+d}$
8. Dividir $\frac{2a}{3c}$ por b. » $\frac{2a}{3bc}$.
9. Dividir $\frac{3}{ab+cd}$ por bd. » $\frac{3}{ab^2d+bcd^2}$.
10. Dividir $\frac{3+5a}{a-b}$ por $a+b$. » $\frac{3+5a}{a^2-b^2}$.
11. Dividir $\frac{3a+5c}{2x+3y}$ por $2x-3y$. » $\frac{3a+5c}{4x^2-9y^2}$.
12. Dividir $\frac{b-c}{a^2-ab+b^2}$ por $a-b$. » $\frac{b-c}{a^3-b^3}$.

163. Na divisão de uma fração por outra, há dois casos a considerar, que são:

1.° Quando as frações teem um denominador comum.

2.° Quando as frações teem denominadores diferentes.

1.º Caso. Dividir $\frac{12a}{m}$ por $\frac{3a}{m}$.

Solução. Como as duas frações teem um denominador comum, bastará só operar com os numeradores. Então $12a \div 3a = 4$, isto é, $12a$ contém 4 vezes $3a$, e por isso, $\frac{12a}{m}$ contém 4 vezes $\frac{3a}{m}$.

Operação

$$\frac{12a}{m} \div \frac{3a}{m} = 4$$

2.º Caso. Dividir $\frac{a}{x}$ por $\frac{c}{y}$.

Solução. Desde que os denominadores são diferentes, devemos reduzí-los a um denominador comum, e teremos $\frac{ay}{xy} \div \frac{cx}{ay}$. Agora, como as duas frações teem um denominador comum, podemos fazer a operação só com os numeradores, como no caso acima $ay \div cx = \frac{ay}{cx}$.

Operação

$$\frac{a}{x} \div \frac{c}{y} = ?$$

$$\frac{ay}{xy} \div \frac{cx}{xy} = \frac{ay}{cx}.$$

Examinando o quociente $\frac{ay}{cx}$, vemos que êle é composto de $\frac{a}{x} \times \frac{y}{c}$, isto é, o dividendo multiplicado pelo divisor, tendo êste os termos invertidos. Daquí podemos formular uma só regra para os dois casos:

Regra. *Para se dividir uma fração por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas frações.*

Nota. Se o dividendo ou o divisor fôr uma expressão mista, transforma-se em uma fração (**n. 150**), e procede-se como na regra acima.

Se o dividendo fôr uma quantidade inteira, além da regra já exposta podemos também dar ao inteiro o denominador 1 como $a=\frac{a}{1}$ e depois proceder como acima.

1. Dividir $\frac{a}{3}$ por $\frac{2a}{9}$. Resp. $1\frac{1}{2}$.
2. Dividir $\frac{3a}{5}$ por $\frac{4a}{7}$. » $\frac{21}{20}$.
3. Dividir $\frac{a^2b}{cd}$ por $\frac{ab}{d}$. » $\frac{a}{c}$.
4. Dividir $\frac{x^2}{3a}$ por $\frac{xy^2}{2b}$. » $\frac{2bx}{3cy^2}$.
5. Dividir 4 por $\frac{a}{3}$. » $\frac{12}{a}$.
6. Dividir 4 por $\frac{3}{a}$. » $\frac{4a}{3}$.
7. Dividir ab^2 por $\frac{2ab}{5c}$. » $\frac{5bc}{2}$.
8. Dividir $\frac{6ax}{3}$ por $\frac{4x}{3}$. » $\frac{3a}{2}$.
9. Dividir $\frac{3a^2x}{7}$ por $\frac{3ax^2}{14}$. » $\frac{2a}{x}$.
10. Dividir $\frac{16ax}{5}$ por $\frac{4x}{15}$. » $12a$.
11. Dividir $\frac{6z+4}{5}$ por $\frac{3z+2}{4y}$. » $\frac{8y}{5}$.
12. Dividir $\frac{z^2-4}{6}$ por $\frac{z-2}{2}$. » $\frac{z+2}{3}$.
13. Dividir $\frac{x^2-2xy+y^2}{ab}$ por $\frac{x-y}{bc}$. » $\frac{cx-cy}{a}$.
14. Dividir $\frac{a^2-b^2}{4}$ por $\frac{a+b}{8}$. » ?
15. Dividir $5a^2-\frac{1}{5}$ por $a+\frac{1}{5}$. » ?
16. Dividir $\frac{7a^2-5a}{3}$ por $\frac{a^2}{3}$. » ?

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

164. Toda igualdade é composta de duas expressões unidas pelo sinal =; a expressão que está à esquerda dêste

sinal, chama-se **primeiro membro**; e a que está à direita, chama-se **segundo membro.** Exemplo:

$$\underset{\text{(1.° Membro)}}{5x+3x-y} \quad = \quad \underset{\text{(2.° Membro)}}{a+12}$$

Cada membro de uma igualdade pode ter um ou mais termos precedidos pelos sinais + ou —; assim, na igualdade acima, o primeiro membro tem três termos, e o segundo tem dois.

Dentre as igualdades precisamos, em Álgebra, distinguir as *identidades* e as *equações*. A igualdade é uma identidade si ela persiste quaisquer que sejam os valores atribuidos às suas letras. Por exemplo: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ é uma identidade, pois a igualdade subsiste para qualquer valor que se dê a a e b. Já $x-5=3$ é uma equação, pois a igualdade só fica satisfeita dando-se a x o valor 8. A equação existe, portanto, quando a igualdade só se satisfaz dando-se às letras determinados valores. Costuma-se, para indicar a identidade, separar os seus dois membros, pelo sinal $\equiv$.

165. Em uma equação há geralmente quantidades conhecidas e quantidades desconhecidas. As quantidades conhecidas são representadas por números ou pelas primeiras letras do alfabeto, a, b, c, etc.; e as quantidades desconhecidas são representadas pelas últimas letras x, y, e z e chamam-se incógnitas.

166. Neste capitulo só estudaremos as equações com uma incógnita, que classificaremos pelos graus desta.

Equação do 1.º grau é a que contém uma só incógnita na sua primeira potência, isto é, com o expoente 1 subentendido, pois x ou x^1 exprime a primeira potência de x. Assim, $2x+5=9$ é uma equação do primeiro grau.

Equação do 2.º grau é aquela em que o maior expoente da incógnita é 2. Assim $4x^2-7=29$ e $3x^2-4x+7=8-3x$ são equações do 2.° grau.

167. Quando uma equação contém mais de uma incógnita, o seu grau é igual à maior soma dos expoentes das quantidades desconhecidas em qualquer termo.

168. Conhece-se, portanto, o grau de uma equação pelo maior expoente da incógnita, quando há uma só, ou pela

maior soma dos expoentes das incógnitas em qualquer termo, quando há mais de uma.

Agora trataremos sòmente das equações do 1.° grau, depois exporemos as outras circunstanciadamente.

169. Ha seis proposições que precisamos conhecer para mais fàcilmente compreendermos as transformações a que, muitas vezes, é necessário submeter uma equação.

Estas proposições, por serem evidentes e não precisarem de demonstração, chamam-se também **axiomas:**

1.° Se a duas quantidades iguais, a mesma quantidade fôr adicionada, as duas somas serão iguais.

2.° Se de duas quantidades iguais, a mesma quantidade fôr subtraída, os dois restos serão iguais.

3.° Se duas quantidades iguais forem multiplicadas pelo mesmo fator, os dois produtos serão iguais.

4.° Se duas quantidades iguais forem divididas pelo mesmo divisor, os dois quocientes serão iguais.

5.° Se duas quantidades iguais forem elevadas à mesma potência, os dois resultados serão iguais.

6.° Se a mesma raiz fôr extraída de duas quantidades iguais, os dois resultados serão iguais.

170. Estas seis proposições ou axiomas podem ser reduzidas a uma só, a saber: *Se fizermos a mesma operação em duas quantidades iguais, os resultados serão iguais.* Daqui poderemos depreender que, se um membro de uma equação passar por alguma modificação, e o outro membro passar por uma modificação idêntica, os dois membros continuarão em igualdade.

171. Diz-se que um valor da incógnita **verifica** a equação quando, substituindo a incógnita por êle, o valor numérico do 1.° membro se torna igual ao do 2.° membro. Assim, 4 verifica a equação $3x+5=6x-7$, porque se substituirmos x por 4, teremos para valor numérico do 1.° membro $12+5$ ou 17 e para valor numérico do 2.° membro $24-7=17$.

Transformação das equações

172. Resolver uma equação é achar o valor da incógnita que verifica a equação; este valor chama-se também **raiz da equação.**

173. Para achar a raiz de uma equação, é preciso submetê-la a certas transformações.

174. As transformações que constantemente precisamos efetuar para resolver uma equação, são as seguintes:

1.ª Eliminar os denominadores.

2.ª Transpor os termos, isto é, passá-los de um membro para o outro.

3.ª Reduzir os termos semelhantes.

Eliminar os denominadores

175. Quando um ou mais termos de uma equação apresentam denominadores, devemos fazê-los desaparecer.

Problema. Eliminar os denominadores na equação: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5.$

Solução. O mínimo múltiplo comum dos denominadores 2 e 3 é 6, porque $2 \times 3=6$. Multiplicando por 6 todos os termos da equação, temos $\frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=30$.

Com esta multiplicação não alteramos a equação, porque, se o primeiro membro ficou 6 vezes maior, o segundo teve igual aumento, e por isso continuam ambos em igualdade. (Axioma 3.°).

Agora as frações $\frac{6x}{2}$ e $\frac{6x}{3}$ podem ser simplificadas dividindo os numeradores pelos seus respectivos denominadores **(n. 149)**, e ficarão $3x$ e $2x$; a equação $3x+2x=30$, não tem mais denominadores.

Operação

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$$

$$\frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=30$$

$$3x+2x=30$$

Problema. Eliminar os denominadores da equação $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}=d.$

Solução. O mínimo múltiplo comum dos denominadores ab e bc é abc **(n. 131)**; multiplicando por abc todos os termos da equação, temos $\frac{abcx}{ab}+\frac{abcx}{bc}=abcd.$

Simplificando agora as duas frações, temos cx e ax, e a equação resultante será $cx+ax=abcd$.

Operação

$$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}=d$$

$$\frac{abcx}{xb}+\frac{abcx}{bc}=abcd$$

$$cx+ax=abcd$$

Regra. *Para eliminar os denominadores de uma equação, acha-se o mínimo múltiplo comum de todos os denomi-*

nadores; multiplica-se por êle cada termo da equação, simplificando-se os produtos.

Inteirar as seguintes equações:

		Respostas
1.	$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 2.$	$4x - 3x = 24.$
2.	$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1.$	$20x + 15x + 12x = 60.$
3.	$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} - \frac{x}{6} = \frac{5}{12}.$	$6x + 3x - 4x = 10.$
4.	$\frac{x}{3} - \frac{x}{5} + \frac{x}{10} = \frac{7}{10}.$	$10x - 6x + 3x = 21.$
5.	$\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3} + 6.$	$3x - 24 = 2x + 36.$
6.	$\frac{5x}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{7x}{12}.$	$15x - 20 = 18 + 14x.$
7.	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + f = g.$	$ad - bc + bdf = bdg.$
8.	$\frac{2x+8}{2} - 4 = \frac{x-4}{12} + 57$	?
9.	$\frac{2x-3}{4} + \frac{x}{7} = \frac{x-3}{2} + \frac{5}{14}.$	?
10.	$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b} = \frac{c}{a^2-b^2}.$	$ax - bx + ax + bx = c.$

Transpôr os termos de uma equação

176. Quando ambos os membros de uma equação conteem quantidades conhecidas e desconhecidas, procura-se reunir as quantidades desconhecidas num dos membros da equação e as conhecidas no outro. Em geral, as desconhecidas ficam no 1.° membro.

Problema. Transpor os termos da equação $6x-5=7+3x$, reunindo no 1.° membro os que contêm a incógnita.

Solução. Nesta equação temos de passar $3x$ para o primeiro membro, e -5 para o segundo.

Tirando $3x$ do segundo membro, êle ficará com menos $3x$; mas para conservar a igualdade, passa-se $3x$ com o sinal — para o primeiro membro, e assim os dois membros ficarão com menos $3x$, e conservarão a igualdade.

Operação

$$6x - 5 = 7 + 3x$$
$$6x - 3x = 7 + 5$$

Suprimindo o termo -5 do primeiro membro, êle aumentará 5 unidades, porque -5 quer dizer menos 5; ora, para conservarmos a igualdade, acrescentaremos outro membro 5 com o sinal +, e assim os dois membros terão 5 unidades de mais, o que não alterará a igualdade. E a equação será $6x-3x=7+5$.

Regra. *Em uma equação podemos passar qualquer termo de um membro para o outro, mudando-lhe o sinal.*

Nas seguintes equações, o discípulo transporá os termos conhecidos para o segundo membro, e os desconhecidos, para o primeiro:

		Resp.
1.	$3x+6-8=2x+3.$	$3x-2x=3+8-6.$
2.	$ax+b=d-cx.$	$ax+cx=d-b.$
3.	$4x-6=2x+4.$	$4x-2x=4+6.$
4.	$9x+c=cx+d.$	$9x-cx=d-c.$
5.	$ax+d=dx+b.$	$ax-dx=b-d.$

Redução de termos semelhantes

177. Depois de transpormos os termos de uma equação, precisamos reduzir em cada membro todos os termos semelhantes.

Feita a redução dos termos semelhantes o 1.° membro será um termo que contém x e o 2.° membro uma quantidade conhecida. Para achar o valor de x bastará, então, dividir os 2 membros da equação pelo coeficiente de x.

1.° Problema. Qual o valor de x na equação $3x+2x=15+10$?

Solução. Os dois termos do primeiro membro podem ser reduzidos a um só, porque $3x+2x=5x$.

Também os dois termos do segundo membro podem ser reduzidos a um só, pois $15+10=25$. A equação reduzida é $5x=25$, e o valor de x é $25 \div 5 = 5$.

Operação

$$3x+2x=15+10$$
$$5x=25$$
$$x=5$$

2.° Problema. Achar o valor de x na equação $3x+x=18+3$.

Solução. Reduzindo ambos os membros, temos $4x=21$; ora, o valor de x é 21 dividido por 4, isto é, $\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Operação

$$3x+x=18+3$$
$$4x=21$$
$$x=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

178. Para resolvermos uma equação literal, temos de fazer às vezes alguma combinação com a multiplicação ou com a divisão. Assim, na equação $ax=b$, se dividirmos ambos os termos por a, teremos $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$; simplificando agora $\frac{ax}{a}$, temos $x=\frac{b}{a}$.

3.º Problema. Qual o valor de x na equação $ax-bx+$ $+cx=d$?

Operação

$$ax-bx+cx=d$$
$$x(a-b+c)=d$$
$$\frac{x(a-b+c)}{a-b+c}=\frac{d}{a-b+c}$$
$$x=\frac{d}{a-b+c}$$

Solução. O primeiro membro sendo decomposto para se tirar o fator x, ficará $x(a-b+c)$. (Vêde n. 115). Dividindo agora ambos os termos por $a-b+c$, e depois simplificando o primeiro membro, teremos $x=\frac{d}{a-b+c}$.

Nota. Na prática não precisamos estar indicando a divisão de ambos os membros pela coeficiente da incógnita. Com efeito: sabemos que para dividir um produto por um de seus fatores, basta suprimir êsse fator. De sorte que, para dividir $x(a-b+c)$ por $a-b+c$, é suficiente suprimir $a-b+c$. Faz-se então $x\ (a-b+c)=d$ donde $x=\frac{d}{a-b+c}$.

179. Antes de dar a regra completa para a solução das equações, vamos resolver ainda a equação $\frac{3x}{2}-4=6+\frac{x}{4}$.

Solução. Equação dada é	$\frac{3x}{2}-4=6+\frac{x}{4}$
eliminando os denominadores	$6x-16=24+x$,
transpondo os termos	$6x-x=24+16$,
reduzindo	$5x=40$,
dividindo ambos os membros por 5	$x=8$.

Regra geral para a resolução

I. *Eliminam-se os denominadores.*

II. *Transpõem-se todas as quantidades conhecidas para um dos membros, e as desconhecidas para o outro.*

III. *Reduzem-se em cada membro da equação os termos semelhantes e depois dividem-se ambos os membros pelo coeficiente da incógnita.*

Resolver as seguintes equações:

		Resp.	
1.	$3x-5=2x+7$.		$x=12$.
2.	$3x-8=16-5x$.	»	$x=3$.
3.	$5x-7=3x+15$.	»	$x=11$.
4.	$3x-25=-x-9$.	»	$x=4$.
5.	$15-2x=6x-25$.	»	$x=5$.
6.	$5(x+1)+6(x+2)=9(x+3)$.	»	$x=5$.
7.	$4(5x-3)-64(3-x)-3(12x-4)=96$.	»	$x=6$.

8.	$10(x+5)+8(x+4)=5(x+13)+121$.	Resp.	$x=8$.
9.	$\frac{x}{2}-2=5-\frac{x}{5}$.	»	$x=10$.
10.	$\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+7=\frac{x}{8}-\frac{x}{6}+\frac{21}{2}$.	»	$x=12$.
11.	$x+\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}=18$.	»	$x=8$.
12.	$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=14$.	»	$x=24$.
13.	$\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=2\frac{1}{2}$.	»	$x=2$.
14.	$\frac{x-2}{4}-2=1-\frac{x+7}{3}$.	»	$x=2$.
15.	$\frac{3x+1}{2}-\frac{2x}{3}=10+\frac{x-1}{6}$.	»	$x=14$.
16.	$\frac{x+2}{3}-\frac{x-3}{4}=x-2-\frac{x-1}{2}$.	»	$x=7$.
17.	$\frac{3x-2}{4}-\frac{4-x}{2}=2x-\frac{7x-2}{3}$.	»	$x=2$
18.	$\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}x+18=\frac{1}{9}(4x+1)$.	»	$x=20$.
19.	$\frac{5x}{x+4}=1$.	»	$x=1$.
20.	$2x-\frac{x-2}{10}=x+\frac{x+18}{15}$.	»	$x=1\frac{1}{5}$.
21.	$4x-b=2x-d$.	»	$x=\frac{b-d}{2}$.
22.	$ax+b=cx+d$.	»	$x=\frac{d-b}{a-c}$.
23.	$ax-bx=d-cx$.	»	$x=\frac{d}{a+c-b}$.
24.	$ax-bx=c+dx-m$.	»	$x=\frac{c-m}{a-b-d}$.
25.	$7+9a-5x=6x+5ax$.	»	$x=\frac{9a+7}{5a+11}$.
26.	$b(a-bx)+c(ax-c)=bc$.	»	$x=\frac{bc-ab+c^2}{ac-b^2}$.
27.	$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$.	»	$x=\frac{abc}{a+b}$.
28.	$\frac{ab}{x}=bc+\frac{1}{x}$.	»	$x=\frac{ab-1}{bc}$.
29.	$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=1$.	»	$x=a+b+c$.
30.	$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d$.	»	$x=\frac{abcd}{ab+ac+bc}$.
31.	$\frac{a}{x}+\frac{b}{c}-\frac{d}{m}=0$.	»	$x=\frac{acm}{cd-bm}$.

32. $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$. Resp. $x=\frac{a^2}{a-b}$.

33. $\frac{ax}{2}+\frac{bx}{3}=c$. » $x=?$

34. $\frac{3x}{2}+\frac{2a}{3}=\frac{4b}{5}+\frac{15}{3}$. » $x=?$

35. $x+2=3x+\frac{x-8}{4}-\frac{x+6}{3}$. » $x=?$

36. $x-20=-\frac{2x+1}{5}$. » $x=?$

37. $\frac{3a+x}{x}-5=\frac{6}{x}$. » $x=?$

38. $2x+\frac{ax-b}{3}=x-a$. » $x=?$

39. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=m$. » $x=?$

PROBLEMAS

180. Problema é uma questão para resolver, na qual se dá uma ou mais quantidades conhecidas chamadas **dados**, e se requer uma ou mais quantidades desconhecidas ou **incógnitas.**

181. Resolver um problema é determinar as quantidades desconhecidas, por meio de operações feitas com as quantidades conhecidas.

182. A solução de um problema consta de duas partes que são:

A *primeira* é a formação da equação que consiste em exprimir em linguagem algébrica a relação que há entre as quantidades desconhecidas e os dados do problema.

A *segunda* é a solução da equação, isto é, achar o valor da incógnita.

183. A primeira parte é geralmente a mais difícil. Não é possível formular uma regra precisa e clara que habilite o discípulo a traduzir prontamente o enunciado de um problema em uma equação algébrica; o próprio discípulo com o seu raciocínio é quem tem de formar a equação, segundo a natureza dos dados oferecidos para o cálculo.

184. A primeira cousa que o discípulo tem de fazer para resolver um problema, é compreender perfeitamente o enunciado, isto é, conhecer a natureza e todas as condições

da questão para poder exprimí-las em linguagem algébrica numa equação. A direção geral para êste processo é a seguinte:

Regra. *Representam-se as incógnitas com as últimas letras do alfabeto.*

Exprime-se em linguagem algébrica as relações que há entre as quantidades conhecidas e as incógnitas, de sorte que a equação formada satisfaça as condições do problema.

Resolve-se depois a equação.

185. Vamos agora resolver alguns problemas para mostrar aos discipulos o modo por que devem dirigir o seu raciocínio nestes processos algébricos.

I Problema. A soma de dois números é 186, e o maior é o dôbro do menor; quais são os números?

Solução. Seja x o número menor, o maior será $2x$. Como os dois números somam 186, a equação será $x+2x=186$. Resolvida a equação, vemos que x, número menor, é 62, e $2x$ que é o número maior, é 124

Verificação. O resultado da solução é verdadeiro, quando satisfaz todas as condições do problema. Ora neste problema há duas condições: a primeira é que os dois números somam 186; e a segunda é que o maior é o dôbro do menor. Os números 62 e 124 satisfazem estas condições, porque 62+124=186, e 124 é o dôbro de 62.

Equação

$x+2x=186$
$3x=186$
$x=62$
$2x=124$

II Problema. Um pai disse a seu filho: «A diferença das nossas idades é 48 anos, e eu tenho cinco vezes a tua idade». Quais eram as duas idades?

Solução. Seja x a idade do filho; então a idade do pai será $5x$. Como a diferença das duas idades é 48 anos, a equação será $5x-x=48$. Resolvida a equação, x é igual a 12; logo, a idade do filho é 12 anos, e a do pai é 5 vezes maior, isto é, 5×12=60 anos.

Verificação. 60—12=48.

Equação

$5x-x=48$
$4x=48$
$x=12$
$5x=60$

III Problema. Qual é o número que, juntando-se-lhe um terço de si mesmo, ficará 24?

Solução. Seja x o número; então um terço de x é $\frac{x}{3}$.

A equação será $x+\frac{x}{3}=24$.

Resolvida a equação, x é igual a 18; logo, o número é 18.

Verificação. $18+\frac{18}{3}=24$.

Equação

$x+\frac{x}{3}=24$
$3x+x=72$
$4x=72$
$x=18$

IV Problema. Qual é o número que, juntando-se-lhe metade de si mesmo, e do resultado subtraindo-se dois terços do mesmo número, restará 105?

Solução. Seja x o número; então a metade dêsse número é $\frac{x}{2}$, e dois terços são $\frac{2x}{3}$.

A equação será $x+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=105$.

Resolvida a equação, o valor de x é 126.

Verificação. 126+63—84=105.

Equação

$$x+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=105$$
$$6x+3x-4x=630$$
$$5x=630$$
$$x=126$$

V Problema. Dividir uma linha de 25 centimetros de comprimento em duas partes, de sorte que a maior tenha 3 centímetros mais do que a menor.

Solução. Seja x a parte menor, e $x+3$ a maior; então a equação será $x+x+3=25$. O valor de x é 11 que é a parte menor; a maior é $x+$ $+3=14$.

Verificação. 11+14=25.

Equação

$$x+x+3=25$$
$$2x=25-3$$
$$2x=22$$
$$x=11$$
$$x+3=14$$

VI Problema. Dividir Cr $68,00 entre A, B e C, de sorte que B receba Cr $5,00 mais da que A, e C receba Cr $7,00 mais do que B.

Solução. Seja x cruzeiros a parte de A; então a parte de B será $x+5$, e a parte de C será $x+5+7$, isto é, $x+12$.

A equação será $x+x+5+x+12=68$.

O valor de x é 17; então a parte de A é Cr $17,00; a parte de B é $22,00 e a parte de C é $29,00.

Verificação. $17,00+$22,00+$29,00= =$68,00.

Equação

$$x+x+5+x+12=68$$
$$3x=51$$
$$x=17$$
$$x+5=22$$
$$x+12=29$$

VII Problema. Qual é o número que sendo adicionado com a sua terça parte, a soma será igual à sua metade e mais 10?

Solução. Seja x o número pedido; então o número com a sua terça parte é $x+\frac{x}{3}$; e a metade do número com mais 10 é $\frac{x}{2}+10$.

A equação será $x+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+10$.

Resolvida a equação, achamos que o valor de x é 12.

Verificação. 12+4=6+10.

Equação

$$x+\frac{x}{3}=\frac{x}{2}+10$$
$$6x+2x=3x+60$$
$$6x+2x-3x=60$$
$$5x=60$$
$$x=12$$

VIII Problema. Um tanque tinha água até a terça parte da sua altura; lançando-se dentro dele 17 barrís de água, ficou cheia a metade do tanque; quantos barrís levava o tanque?

Solução. Seja x o número de barrís que leva o tanque. Visto que um terço do número mais 17 é igual à metade do número, então a equação será $\frac{x}{3}+17=\frac{x}{2}$.

O valor de x é 102, que é o número de barrís que leva o tanque.

Como os dois termos teem o sinal menos, trocam-se os sinais nos dois termos, e assim ficarão com o sinal mais.

Verificação. $\frac{102}{3}+17=\frac{102}{2}$.

Equação

$$\frac{x}{3}+17=\frac{x}{2}$$
$$2x+102=3x$$
$$2x-3x=-102$$
$$-x=-102$$
$$x=102$$

IX Problema. A soma de dois números é 67, e a sua diferença é 19; quais são os dois números?

Solução. Seja x o número; $x+19$ será o maior.

A equação será $x+x+19=67$.

O valor de x é 24; logo, o número menor é 24, e o maior é $x+19=43$.

Verificação. 24+43=67.

Equação

$$x+x+19=67$$
$$2x=67-19$$
$$2x=48$$
$$x=24$$
$$x+19=43$$

Outra solução. Seja x o número maior; $x—19$ será o menor.

Então, a equação será $x+x—19=67$.

O número maior, que é x, é 43; e o número menor que é $x—19$, é 24.

$$x+x-19=67$$
$$2x=67+19$$
$$2x=86$$
$$x=43$$
$$x-19=24$$

X Problema. Um fazendeiro contratou um empregado por 30 dias, dando-lhe 25 tostões e comida em cada dia que trabalhasse, e cobrando-lhe 20 tostões pela comida em cada dia que vadiasse. No fim do tempo, o empregado recebeu 300 tostões; quantos dias trabalhou êle, e quantos dias vadiou?

Solução. Seja x o número de dias que trabalhou,

O número de dias que vadiou será $30-x$.

$25x$=salário dos dias de trabalho.

$20(30-x)$=importe da comida nos dias que não trabalhou.

Deduzindo do salário que ganhou, o importe da comida dos dias que vadiou, restam 300 tostões; então a equação será

$25x-20(30-x)=300$.

Sendo x igual a 20, os dias que trabalhou foram 20, e os que vadiou foram $30-20=10$.

Equação

$$25x-20(30-x)=300$$
$$25x-600+20x=300$$
$$45x=300+600$$
$$45x=900$$
$$x=20$$
$$30-x=10$$

Verificação. 20 dias a 25 tostões........ 500 tostões
Deduzindo 10 " a 20 " .... 200 "

Restam. 300 "

Nota. Damos o dinheiro em tostões, unidade monetária antiga; o discípulo agora poderá substituir tostões por cruzeiros ou centavos.

XI Problema. Duas locomotivas partiram ao mesmo tempo dos extremos de uma linha férrea de 210 quilômetros de extensão; uma movia-se com a velocidade de 40 quilômetros por hora, e a outra com a velocidade de 30. Quantas horas gastaram para se encontrar?

Solução. Seja x o número das horas; ora como uma locomotiva anda 40 quilômetros por hora, em x horas andou $40x$. A outra locomotiva, por semelhante razão, andou $30x$. Como a linha tem 210 quilômetros, a equação é $40x+30x=210$. Resolvida a equação, achamos que o valor de x é 3, número de horas precisas para o encontro.

Equação

$$40x+30x=210$$
$$70x=210$$
$$x=3$$

Se o problema, além de pedir o número de horas, pedisse também o ponto do encontro, a solução seria muito fácil, porque sabendo-se que as locomotivas gastaram 3 horas para se encontrar, conclue-se daquí

que a mais veloz andaria $40\times3=120$ quilômetros;
a outra andaria $30\times3=90$ quilômetros.

Isto quer dizer que as locomotivas se deviam ter encontrado no ponto da linha, que dista 120 quilômetros de um extremo, e 90 do outro.

XII Problema. De uma estação saíu um trem misto correndo 20 milhas por hora; 3 horas depois, saíu o trem expresso na mesma direção, andando 25 milhas por hora. Em quantas horas êste alcançou aquele?

Solução. Chamemos x o número de horas que andou o expresso; então, será $x+3$ o número de horas que andou o misto. Ora como ambos correm uma distância igual, segue-se que o número de horas multiplicado pela distância que cada um anda em cada hora, dará produtos iguais, e por isso

$25\times x=20\times(x+3)$.

Equação

$$25\times x=20(x+3)$$
$$25x=20x+60$$
$$5x=60$$
$$x=12$$

Resolvendo-se a equação acha-se $x=12$.

Verificação. O expresso andou $25\times12=300$ milhas;
o misto andou $20\times15=300$ milhas.

13. Dividir 42 amêndoas entre Júlio e José, de sorte que José receba o dôbro das de Júlio. Resp. Júlio 14, José 28.

14. Dividir o número 48 em três partes, de sorte que a segunda parte seja o dôbro da primeira, e a terceira três vezes a primeira. Resp. 8, 16 e 24.

15. Dividir o número 60 em três partes, de sorte que a segunda parte tenha três vezes a primeira, e a terceira seja o dôbro da segunda. Resp. 6, 18 e 36.

16. Um meio, um terço e um quarto de certo número somam 65. Qual é o número? Resp. ?

17. Dividir 88 libras esterlinas entre A, B e C, dando a B $\frac{2}{3}$, e a C $\frac{3}{7}$ da parte de A. Resp. A=42, B=28 e C =18.

18. Dividir o número 32 em duas partes, de sorte que a maior tenha mais 6 do que a menor. Resp. 13 e 19.

19. O número total de empregados de uma fábrica é 1000 pessoas; o número de meninos é o dôbro do número de homens, e o número de mulheres é 11 vezes o número de meninos. Achar o número de homens, de meninos e de mulheres. Resp. Homens 40, meninos 80, mulheres, 880.

20. Um negociante comprou quantidades iguais de farinha de duas sortes, uma a \$8,00 cada saca, e a outra a \$10,00; importando a farinha em \$198,00, quantas sacas comprou ao todo? Resp. 22.

21. Do triplo de certo número subtraindo 17, resta 22; achar o número. Resp. ?

22. Duas pessôas estando separadas pela distância de 4200 quilômetros, tomaram às mesmas horas os trens expressos para onde se tinham de encontrar, andando uma 40 quilô-

metros por hora, e a outra 30. Quantas horas gastaram para se encontrar? Resp. 60.

23. Dividir uma linha de 28 centímetros em duas partes, de sorte que uma tenha $\frac{3}{4}$ da outra. Resp. 12 e 16.

24. A soma de dois números é 200, e a sua diferença é 50; quais são os números? Resp. 125 e 75.

25. A soma de dois números é 100, e a sua diferença é 76; quais são os números? Resp. ?

26. A soma de dois números é 5 $\frac{1}{2}$ e a sua diferença $\frac{3}{4}$; quais são os números? Resp. 3 $\frac{1}{8}$ e 2 $\frac{3}{8}$.

27. Albano disse a sua irmã: «Eu tenho o dôbro da tua idade, e, se eu tivesse mais 15 anos, teria o triplo». Qual era a idade de cada um? Resp. ?

28. A soma das idades de A, B e C é 109 anos; B é 3 anos mais moço do que A, e 5 anos mais velho do que C. Quais são as suas idades? Resp. ?

29. Qual é o número que se $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de si mesmo lhe forem juntos e ainda mais 26, a soma será igual a 5 vezes o mesmo número? Resp. ?

30. Um menino disse: «Se a metade e um terço do meu dinheiro e mais Cr $9,00 fossem juntos ao que eu tenho, eu teria Cr $20,00.» Quanto tinha êle? Resp. ?

31. Um pai de família morreu deixando Cr $6.500,00 para serem divididos por sua viúva, 2 filhos e 3 filhas, de sorte que cada filho recebesse o dôbro da parte de cada filha, e a viúva recebesse $500,00 menos do que o total que recebessem todos os filhos. Pergunta-se qual é a parte da viúva, a parte de cada filho, e a de cada filha.

Resp. Viúva Cr $3.000,00; filho $1.000,00 e filha $500,00.

32. Em uma eleição o número de votos que tiveram dois candidatos foi 256; ora, tendo o candidato eleito uma maioria de 50 votos, quantos teve cada um? Resp. 153 e 103.

33. Qual é o número que, se fôr multiplicado por 7, e ao produto se adicionar 3, e depois dividir tudo por 2, e dêste quociente subtrair 4, restará 15. Resp. 5.

34. Um negociante foi à Capital comprar alguns gêneros. No primeiro dia gastou $\frac{1}{3}$ do seu dinheiro; no segundo dia $\frac{1}{4}$; no terceiro dia $\frac{1}{5}$; no quarto dia $\frac{1}{6}$; e então restaram-lhe só Cr $300,00. Quanto tinha êle quando chegou?

Resp. Cr $6.000,00.

35. Um pintor foi contratado para trabalhar 28 dias em uma obra, com a condição de receber $7,50 em cada dia que trabalhasse, e de pagar $2,50 em cada dia que não comparecesse ao trabalho. No fim de 28 dias, recebeu $120,00; quantos dias trabalhou? Resp. 19.

36. Dividir o número 55 em duas partes, de sorte que uma esteja para a outra, assim como 2 está para 3.

Solução. Seja $2x$ um dos números; $3x$ será o outro; então a equação será $2x+3x=55$. Sendo $x=11$, um número será 22 e o outro 33.

Os discipulos que já tiverem estudado proporções em Aritmética, poderão também resolver êste problema pelo seguinte modo: $x=$ a um número, $55-x=$ ao outro número. Então, $x:55-x::2:3$. Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, temos a equação $3x=110-2x$, e $x=22$, e $55-x=33$.

Equação

$$2x+3x=55$$
$$5x=55$$
$$x=11$$
$$2x=22$$
$$3x=33$$

37. A soma de dois números é 60, e o menor está para o maior assim como 5 está para 7. Quais são os números? Resp. 25 e 35.

38. Dividir o número 92 em quatro partes que estejam na proporção de 3, 5, 7 e 8. Resp. 12, 20, 28 e 32.

39. Um vapor que anda 15 milhas por hora com a corrente, e 10 milhas por hora contra ela, gasta 25 horas em ir e voltar de uma cidade à outra. Qual é a distância entre as duas cidades? Resp. 150 milhas.

40. Achar um número que multiplicado sucessivamente por 12 e por 8, a diferença de seus produtos seja 28. Resp. 7.

41. Um alfaiate pode fazer uma peça de roupa em 6 dias, e sua mulher pode fazê-la em 9 dias; trabalhando juntos, em quantos dias a poderão fazer?

Solução. Sendo $x=$ao tempo, e a obra igual a 1; então o alfaiate faz $\frac{1}{6}$ cada dia, e a mulher faz $\frac{1}{9}$.

Em x dias, o alfaiate faz $\frac{x}{6}$ e a mulher $\frac{x}{9}$, e os dois juntos fazem $\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=1$. O valor de $x=3\frac{3}{5}$ isto é, 3 dias e $\frac{3}{5}$ de um dia.

Equação

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=1$$
$$3x+2x=18$$
$$5x=18$$
$$x=3\ \frac{3}{5}.$$

42. Um lavrador pode colher todo o seu café em 6 dias; seu filho mais velho o pode colher em 8 dias, e seu filho mais moço o pode colher em 24 dias; trabalhando os três juntos, em quantos dias o poderão colher? Resp. 3 dias.

43. Um professor gasta $\frac{2}{5}$ do seu ordenado anual em casa e comida, $\frac{1}{3}$ do resto em livros e roupa, e ainda economiza Cr $2.400,00 cada ano; qual é o seu ordenado?

Resp. Cr $6.000,00.

44. Qual é o número cuja terça parte excede 15 à quarta parte do mesmo número?

Resp. ?

45. Uma raposa perseguida por um galgo, levava-lhe a dianteira de 60 pulos. A raposa dava 9 pulos enquanto o galgo dava 6; mas 3 pulos dêste valiam 7 pulos daquela. Quantos pulos deu o galgo para alcançar a raposa?

Solução. Este problema oferece alguma dificuldade por causa das unidades diversas que aparecem nos dados, e por isso vamos resolvê-lo.

Se o galgo dava 6 pulos, enquanto a raposa dava 9, deveria dar 1, enquanto a raposa dava $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ pulos.

E se 3 pulos do galgo são iguais a 7 pulos da raposa, então 1 pulo do galgo é igual a $\frac{7}{3}$ do da raposa. Ora, se o galgo dava 1 pulo, enquanto a raposa dava $\frac{3}{2}$ e se o pulo do galgo estava para o da raposa na razão de $\frac{7}{3}$ para 1, segue-se que o galgo pulava na razão de $1 \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ e a raposa na razão de $1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Nestas duas frações estão as duas velocidades reduzidas proporcionalmente à mesma unidade de medida.

Seja, pois, x o número de pulos que dará o galgo para alcançar a raposa. Então o galgo pulará $\frac{7}{3}x$, e a raposa $\frac{2}{3}x$; ora, como o galgo tem de vencer a distância que anda a raposa e ainda mais os 60 pulos que ela lhe leva de distância, segue-se que a equação deve ser $\frac{7x}{3} = \frac{3x}{2} + 60$, e o resultado é 72 pulos

Equação

$$\frac{7x}{3} = \frac{3x}{2} + 60$$
$$14x = 9x + 360$$
$$5x = 360$$
$$x = 72$$

Verificação. O galgo andou 72 pulos dos seus, no mesmo tempo em que a raposa andou $72 \times \frac{3}{2} = 108$ pulos dos seus. Ora, 108 pulos com mais 60 que a separam do galgo fazem 168. Como um pulo do galgo vale $\frac{7}{3}$ do pulo da raposa, o galgo andou $72 \times \frac{7}{3} = 168$ pulos da raposa.

EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS COM DUAS INCÓGNITAS

186. Se tivermos uma só equação com duas incógnitas, estas incógnitas podem tomar valores muito diferentes. Assim, na equação

$$x+y=12$$

como o número 12 pode ser formado de muitos modos, como 11+1, 10+2, 9+3, 8+4, 7+5, 6+6, etc., são muitos os valores que se podem dar a x e a y. Cada par de valores, que podem ser atribuídos a x e a y, constitue uma *solução* da

equação $x+y=12$. Esta equação tem, portanto, uma infinidade de soluções, não tem solução determinada, e por isso se diz que é uma equação **indeterminada.**

187. Consideremos, agora, outra equação com as mesmas incógnitas:

$$x-y=6$$

por exemplo. Ela também é indeterminada, pois há uma infinidade de pares de números cuja diferença é igual a 6:

18 e 12, 15 e 9, 10 e 4, 8 e 2, etc.

Entretanto, só há dois números que somados dão 12 e cuja diferença é 6. São êles: 9 e 3. Por isso, dizemos que

$$x=9 \quad \text{e} \quad y=3$$

é uma solução comum às equações $x+y=12$ e $x-y=6$.

188. Quando são dadas duas ou mais equações para se obter uma solução comum, essas equações se chamam **simultâneas** e se diz que elas formam um **sistema;** a solução comum às equações simultâneas é a solução do sistema. *Resolver* um sistema é achar-lhe a solução.

189. Dado um sistema de duas equações com duas incógnitas, para resolvê-lo, procuramos combinar essas equações de modo a fazer desaparecer uma das incógnitas. Chama-se a isto **eliminar** uma incógnita entre as duas equações.

190. Estudaremos três métodos ou modos de eliminação:

1.° *Eliminação pela redução ao mesmo coeficiente.*
2.° *Eliminação por comparação.*
3.° *Eliminação por substituição.*

Eliminação pela redução ao mesmo coeficiente

191. A eliminação pela redução ao mesmo coeficiente consiste em multiplicar ou dividir uma ou ambas as equações, de modo que o coeficiente de uma incógnita fique igual em valor absoluto nas duas equações, para depois, pela adição ou pela subtração, fazermos desaparecer essa incógnita. Esse método tem também o nome de *eliminação por meio da adição ou subtração.*

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultâneas $2x+y=15$ e $3x-y=5$?

Solução. Sendo o coeficiente de y igual em valor absoluto nas duas equações (**n. 22**), mas tendo os sinais diferentes, isto é, sendo um + e outro —, elimina-se esta letra somando as duas equações membro a membro (**n. 49**). O resultado da adição é $5x=20$ donde $x=4$.

O valor de y pode ser achado, substituindo-se na 1.ª equação o termo $2x$ pelo seu valor que é 8; e então teremos $8+y=15$ de onde tiramos $y=7$.

$$\begin{array}{rll} 2x+y &= 15 & (1^a) \\ 3x-y &= 5 & (2^a) \\ \hline 5x &= 20 & \\ x &= 4 & \\ 8+y &= 15 & \\ y &= 15-8 & \\ y &= 7 & \end{array}$$

Problema. Achar o valor de x e de y nas equações simultâneas $3x+2y=34$ e $x+2y=22$.

Solução. Sendo os coeficientes de y iguais em ambas as equações, e tendo o mesmo sinal, elimina-se esta letra por meio da subtração. O resultado da subtração é $2x=12$ ou $x=6$.

O valor de y pode ser achado, substituindo-se na 2.ª equação a letra x pelo seu valor que é 6, e então teremos $6+2y=22$; $2y=22-6$, e $y=8$.

$$\begin{array}{rll} 3x+2y &= 34 & (1^a) \\ x+2y &= 22 & (2^a) \\ \hline 2x &= 12 & \\ x &= 6 & \end{array}$$

192. Nos dois problemas que acabámos de resolver, vemos que quando uma incógnita tem coeficientes de mesmo valor absoluto e sinais diferentes, elimina-se por meio da adição das duas equações simultâneas; mas quando tem sinais iguais, elimina-se por meio da subtração.

Passemos agora a considerar o caso em que os coeficientes das incógnitas são diferentes.

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultâneas $4x+3y=37$ e $3x-5y=6$?

Solução. Nestas duas equações simultâneas, como os coeficientes são todos diferentes, temos de igualar os coeficientes de x ou de y.

Para igualarmos os coeficientes de x, temos de multiplicar a 1.ª equação por 3, e a 2.ª por 4, e então ambos os coeficientes desta incógnita ficam sendo 12. Para igualarmos os coeficientes de y, temos de multiplicar a 1.ª equação por 5, e a 2.ª por 3, e então ambos os coeficientes desta incógnita ficam sendo 15. Vamos neste caso eliminar a letra x. Multiplicando a 1.ª equação por 3, o produto será a 3.ª equação; e multiplicando a 2.ª equação por 4, o produto será a 4.ª equação. (Vêde **n. 170**).

Ora, como nestas duas novas equações simultâneas (3.ª e 4.ª) os coeficientes de x são iguais e teem o mesmo sinal, elimina-se

$$\begin{array}{rll} 4x+3y &= 37 & (1^a) \\ 3x-5y &= 6 & (2^a) \\ 12x+9y &= 111 & (3^a) \\ 12x-20y &= 24 & (4^a) \\ \hline 29y &= 87 & \\ y &= 3 & \\ & & \\ 4x+9 &= 37 & \\ 4x &= 37-9 & \\ x &= 7 & \end{array}$$

esta letra por meio de subtração, e o resultado é $29y=87$, ou $y=3$. Substituindo agora na 1.ª equação $3y$ por $3\times3=9$, temos $4x+9=37$ ou $x=7$.

Regra. *Multiplica-se ou divide-se uma ou ambas as equações de sorte que os coeficientes da mesma incógnita tenham o mesmo valor absoluto em ambas as equações; se os sinais dessa incógnita forem diferentes, adicionam-se as duas equações, e se forem iguais, subtrai-se.*

Nota. Quando uma ou ambas as equações têm denominadores eliminam-se os mesmos e depois procede-se conforme a regra. (Vêde **n. 175**).

Achar o valor de x e y nas seguintes equações, pelo método da redução ao mesmo coeficiente:

1. $2x+3y=23$, $5x-2y=10$. Resp. $x=4$, $y=5$
2. $4x+y=34$, $4y+x=16$. » $x=8$, $y=2$
3. $30x+40y=270$, $50x+30y=340$. » $x=5$, $y=3$
4. $2x+7y=34$, $5x+9y=51$. » ?
5. $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=18$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=21$. » ?
6. $2x+y=50$, $\frac{x}{6}+\frac{y}{7}=5$. » ?
7. $5x+7y=43$, $11x+9y=69$. Resp. ?
8. $8x-21y=33$, $6x+35y=177$. » ?
9. $21y+20x=165$, $77y-30x=295$. » ?
10. $11x-10y=14$, $5x+7y=41$. » ?
11. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=5$. » ?
12. $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=2$, $4x-2y=0$. » ?

Eliminação por comparação

193. A eliminação por comparação consiste em achar o valor da mesma incógnita em termos da outra nas duas equações, e depois pela comparação dos dois valores, formar uma equação simples, como vamos ver na seguinte solução:

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=16$ e $2x-y=14$?

Solução. O valor de x na primeira equação é $16-y$; e na segunda equação o valor de $2x$ é $14+y$, e de x é $\frac{14+y}{2}$. Ora, como o valor de x é igual em ambas as equações, segue-se que $16-y=\frac{14+y}{2}$. Resolvida esta equação, vemos que $y=6$; e $x=16-6=10$.

$$x+y=16 \quad (1.^a)$$
$$2x-y=14 \quad (2.^a)$$
$$x=16-y$$
$$x=\frac{14+y}{2}$$
$$16-y=\frac{14+y}{2}$$
$$y=6.$$

Regra. *Acha-se em cada equação o valor da incógnita que se quer eliminar.*

Forma-se uma nova equação dêstes valores iguais, e resolve-se como uma equação simples.

O discípulo deve resolver as seguintes equações simultâneas, eliminando a incógnita pelo método de comparação:

	Equações	Resp.		Equações	Resp.
1.	$x+y=12$ $x-y=4.$	Resp. $x=8$ $y=4$	4.	$4x+3y=13$ $3x+2y=9.$	Resp. ?
2.	$2x+2y=36$ $3x-3y=18.$	Resp. $x=12$ $y=6$	5.	$3x+2y=118$ $x+5y=191.$	Resp. ?
3.	$x+y=20$ $2x+3y=42.$	Resp. $x=18$ $y=2$	6.	$4x+5y=22$ $7x+3y=27.$	Resp. ?

Eliminação por substituição

194. A eliminação por substituição consiste em achar em uma equação o valor de uma incógnita em termos das outras quantidades, e depois substituir na outra equação aquela incógnita por seu valor achado.

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações simultâneas $x+2y=17$ e $2x+3y=28$?

Solução. Na primeira equação x é igual a $17-2y$; substituindo na 2.ª equação x pelo seu valor, que é $(17-2y)$, temos a equação $2(17-2y)+3y=28$. Resolvendo esta equação, temos $y=6$.

Substituindo agora na 1.ª equação $2y$ por $2\times6=12$, temos $x+12=17$, e $x=5$.

$$x+2y=17 \quad (1.^a)$$
$$2x+3y=28 \quad (2.^a)$$
$$x=17-2y$$
$$2(17-2y)+3y=28$$
$$\text{ou } 34-4y+3y=28$$
$$y=6, \text{ e } x=5.$$

Regra. *Acha-se em uma equação o valor de uma incógnita, e na outra equação substitue-se esta incógnita pelo valor achado, e depois resolve-se como na equação simples.*

Achar pelo método de substituição os valores de x e y nas seguintes equações simultâneas:

	Equações	Resp.		Equações	Resp.
1.	$x+5y=38$ $3x+4y=37.$	Resp. $x=3$ $y=7$	4.	$4x-3y=26$ $3x-4y=16.$	Resp. ?
2.	$2x+4y=22$ $5x+7y=46.$	Resp. $x=5$ $y=3$	5.	$2x+3y=28$ $3x+2y=27.$	Resp. ?
3.	$3x+5y=57$ $5x+3y=47.$	Resp. $x=4$ $y=9$	6.	$4x+y=43$ $5x+2y=56.$	Resp. ?

Problemas com duas incógnitas

195. Agora, que o discípulo já sabe resolver equações simultâneas com duas incógnitas, poderá também resolver os problemas que apresentarem o mesmo número de quantidades desconhecidas.

I Problema. A soma de dois números é 25, e a sua diferença é igual a 9; quais são os números?

Solução. Seja x o número maior, e y o número menor; então a soma dos dois números é 25, e a sua diferença é 9. Eliminando em ambas as equações a letra y por meio da soma, temos $x=17$, e $y=8$.

Nota. Como já vimos na secção **n. 185**, êste problema pode ser resolvido com uma só incógnita; damo-lo também aquí para o discípulo o resolver com duas. A Algebra oferece meios variados de resolver os problemas.

$$x+y=25$$
$$x-y=9$$
$$2x=34$$
$$x=17$$
$$y=8$$

II Problema. A soma de dois números é 44, e um está para o outro assim como 5 está para 6. Quais são os números?

Solução. Seja x o número maior, e y o número menor; então, como um está para o outro, assim como 5 para 6, segue-se que $5x=6y$. Subtraindo a primeira equação da segunda para eliminar a letra x, temos $y=20$ e $x=24$.

Este problema pode também ser resolvido com uma só incógnita, na seguinte equação $5x+6x=44$.

$$x+y=44 \quad (1.^a)$$
$$5x-6y=0 \quad (2.^a)$$
$$5x+5y=220$$
$$11y=220$$
$$y=20$$
$$x=24$$

III Problema. Achar dois números tais que, se a metade do primeiro fôr adicionada ao segundo, a soma será 34, e se um terço do segundo fôr adicionado ao primeiro, a soma será 28.

Solução. Seja x o primeiro número, e y o segundo.
O enunciado do problema está expresso nas duas equações.
Resolvendo o sistema, acharemos que $x=20$, e $y=24$.
O discípulo fará a verificação.

$$\frac{x}{2}+y=34$$
$$x+\frac{y}{3}=28$$
$$x=20$$
$$y=24$$

IV Problema. Dois mascates irlandeses contaram o seu dinheiro, e depois disse um ao outro: Dá-me um terço do teu dinheiro, e eu terei 110 libras; respondeu-lhe o outro: Dá-me um quarto do teu dinheiro, e eu terei também 110 libras. Quantas libras tinha cada um?

Solução. Seja x o número de libras que tinha um mascate, e y o que tinha o outro; então pelo enunciado do problema, podemos fórmular as duas equações que estão ao lado, nas quais $x=80$ e $y=90$.

$$x+\frac{y}{3}=110$$
$$\frac{x}{4}+y=110$$

5. Achar dois números tais que, $\frac{1}{2}$ do primeiro e $\frac{1}{3}$ do segundo somem 22, e $\frac{1}{4}$ do primeiro e $\frac{1}{5}$ do segundo somem 12. Quais são os números? Resp. 24 e 30.

6. Se ao maior de dois números se juntasse $\frac{1}{3}$ do menor, a soma seria 37; mas se do menor fosse subtraído $\frac{1}{4}$ do maior, o resto seria 20. Quais são os números? Resp. ?

7. Um negociante vendeu a outro 30 dúzias de garrafas de vinho e 25 de cerveja por Cr $280,00. Achar o preço da dúzia de garrafas de cada espécie, sabendo-se que si fossem menos 5 dúzias das de vinho e mais 15 das de cerveja o preço total seria $310,00. Resp. Vinho $6,00, cerveja $4,00.

8. Um fazendeiro vendeu a um vizinho 9 cavalos e 7 vacas por $900,00, e a outro vendeu à razão do mesmo preço 6 cavalos e 13 vacas pela mesma quantia. Qual é o preço de cada cavalo e de cada vaca? Resp. $72,00 e $36,00.

9. Um viajante tinha dois cavalos que lhe custaram certo preço cada um; depois comprou um selim inglês por Cr $100,00: ora, quando êle punha o selim no primeiro cavalo, êste com o selim valia o dôbro do segundo; e quando punha o selim no segundo, êste com o selim valia 3 vezes o primeiro. Quanto lhe custou cada cavalo? Resp. 1.°=$60,00, 2.°=$80,00.

10. Se juntarmos 8 ao numerador de uma fração, ela ficará igual a 2; mas se subtrairmos 5 do denominador, a fração ficará igual a 3. Qual é a fração? Resp. ?

11. Há dois números que somam 37, e se 3 vezes o menor fôr subtraído de 4 vezes o maior, e o resto dividido por 6, o quociente será 6. Quais são os dois números? Resp. 16 e 21.

12. Se subtraírmos 3 de ambos os termos de uma fração, obteremos $\frac{1}{4}$ mas, se juntarmos 5 a ambos os termos, obteremos $\frac{1}{2}$ Qual é a fração? Resp. ?

13. Se o maior de dois números fôsse multiplicado por 5, e o menor por 7, a soma dos seus produtos seria 198; mas, se o maior fôsse dividido por 5, e o menor por 7, a soma dos seus quocientes seria 6. Quais são os números? Resp. 20 e 14.

14. Artur devia Cr $500,00, e Henrique devia $600,00; mas nem um nem outro tinha dinheiro suficiente para pagar o que deviam. Disse Artur a Henrique: Empresta-me $\frac{1}{5}$ do teu dinheiro, e eu então poderei pagar o que devo; respondeu-lhe Henrique: Empresta-me $\frac{1}{4}$ do teu dinheiro, e eu pagarei também o que devo. Que quantia tinha cada um? Resp. Artur Cr $400,00; Henrique $500,00.

15. Um pai repartiu Cr $2.400,00 por seus dois filhos A e B para êles negociarem. No fim de um ano, A tinha perdido $\frac{1}{4}$ do seu capital, enquanto que B, tendo ganho uma soma igual a $\frac{1}{4}$ do seu capital, achou que o seu dinheiro era justamente igual ao de seu irmão. Que quantia deu o pai a cada um? Resp. A=Cr $1.500,00 e B=$900,00.

16. Há 7 anos, a idade de Samuel era três vezes a idade de Elias, e de hoje a 7 anos, a idade de Samuel será justamente o dôbro da idade de Elias. Quais são as suas idades? Resp. Samuel 49 e Elias 21.

17. Dividir o número 75 em duas partes, de sorte que três vezes a maior exceda 15 a sete vezes a menor. Quais são as partes? Resp. ?

18. Achar dois números tais que a soma de cinco vezes o primeiro e duas vezes o segundo seja 19; e a diferença entre sete vezes o primeiro e seis vezes o segundo seja 9. Resp. ?

19. Uma casa e o terreno importaram em Cr $8.500,00; o preço do terreno é $\frac{5}{12}$ do preço da casa. Achar o preço de cada um. Resp. Casa Cr $6.000,00. Terreno $2.500,00.

20. Dividir Cr \$1.280,00 por A e B de sorte que a parte de A multiplicada por 7, seja igual a parte de B multiplicada por 9. Resp. ?

21. A diferença de dois números é 20, e o quociente do maior pelo menor é 3. Quais são estes números? Resp. ?

EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS CONTENDO MAIS DE DUAS INCÓGNITAS

196. Um sistema de mais de duas equações pode ser resolvido por qualquer dos métodos de eliminação que explicámos nos capítulos precedentes.

Quando há mais de duas incógnitas, é preferível o método de redução ao mesmo coeficiente, e é êsse o que agora vamos empregar.

Problema. Achar os valores de x, y e z nas equações simultâneas:

$$\begin{aligned} &(1.^a) \quad x+2y+z=20,\\ &(2.^a) \quad 2x+y+3z=31,\\ &(3.^a) \quad 3x+4y+2z=44. \end{aligned}$$

Solução. Multiplicando por 2 a 1.ª equação para tornar o coeficiente de x igual ao coeficiente de x na 2.ª equação,

temos .. .. $2x+4y+2z=40$,
subtraindo a 2.ª equação $2x+y+3z=31$,
temos a 1.ª resultante .. $3y-z=9$.

Multiplicando agora por 3 a 1.ª equação para tornar o coeficiente de x igual ao coeficiente de x na 2.ª equação,

temos .. .. $3x+6y+3z=60$,
subtraindo a 3.ª equação $3x+4y+2z=44$,
temos a 2.ª resultante .. $2y+z=16$.

Temos agora as duas equações resultantes que são
1.ª resultante .... $3y-z=9$,
2.ª resultante .... $2y+z=16$,
solução .... $5y=25$ e $y=5$.

Somando as duas equações resultantes, achamos que $y=5$; substituindo na 2.ª resultante o termo de $2y$ por 10, achamos que $z=6$; substituindo na 1.ª equação os termos $2y$ e z pelos valores $10+6=16$, achamos que $x=4$.

Regra. *Elimina-se uma incógnita, combinando uma equação com outra; elimina-se ainda a mesma incógnita por outra combinação; e as equações resultantes das duas combinações resolvem-se conforme a regra para duas incógnitas. Achada uma incógnita, as outras se obteem por dedução.*

Resolver as seguintes equações simultâneas e os seguintes problemas:

1. $5x-3y+2z=38$; $3x+3y-4z=30$; $x+3y+4z=58$.

2. $2x+5y-3z=4$; $4x-3y+2z=9$; $5x+6y-2z=18$.

3. $2x+3y-4z=20$; $x-2y+3z=6$; $3x-2y+5z=26$.

4. $5x+2y+4z=46$; $3x+2y+z=23$; $10x+5y+4z=75$.

5. $x+y+z=53$; $x+2y+3z=105$; $x+3y+4z=134$.

6. $3x+4z=43$; $2y-z=5$; $5x+3y=43$.

7. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38$.

8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=22$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=31$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=32$.

1. Um homem tem três filhos; a soma das idades do primeiro e do segundo é 27 anos; a soma das idades do primeiro e terceiro é 29, e a do segundo e terceiro é 32. Qual a idade de cada filho? Resp. 12 anos, 15 e 17.

2. A soma de três números é 59; $\frac{1}{2}$ da diferença entre o primeiro e segundo é 5, e $\frac{1}{2}$ da diferença entre o primeiro e o terceiro é 9; requer-se achar os três números .

Resp. 29, 19 e 11.

3. Achar três números tais que se somarmos o primeiro com $\frac{1}{3}$ dos outros dois, o segundo com $\frac{1}{4}$ dos outros dois, e o terceiro com $\frac{1}{5}$ dos outros dois, cada soma seja igual a 25.

Resp. 13, 17 e 19.

4. Um menino comprou em uma vez 4 bananas e 5 laranjas por \$0,28; em outra, 6 bananas e 4 pêssegos por \$0,36, e em outra, 9 laranjas e 8 pêssegos por \$0,84. Qual é o preço de cada fruta?

Resp. Bananas \$0,02, laranjas \$0,04 e pêssegos \$0,06.

5. Três pessoas, A, B e C tinham Cr \$2.000,00; se A desse \$200,00 a B, então B teria \$100,00 mais do que C; mas se B desse \$100,00 a A, então B teria só $\frac{3}{4}$ do dinheiro de C; pede-se a quantia que cada um possuía.

Resp. A \$500,00; B \$700,00 e C \$800,00.

6. Três batalhões teem 1905 soldados: $\frac{1}{2}$ do primeiro batalhão com $\frac{1}{3}$ do segundo dão 60 soldados menos do que tem o terceiro batalhão; e $\frac{1}{2}$ do terceiro com $\frac{1}{3}$ do primeiro dão 165 soldados menos do que o segundo batalhão. Qual é o número de cada um?

Resp. 1.º batalhão 630, 2.º 675 e 3.º 600.

PROBLEMAS INDETERMINADOS

197. Um problema pode ser determinado ou indeterminado. Quando oferece tantas equações ou condições diferentes quantas são as suas incógnitas o problema é em geral **determinado.** Tem esta denominação, porque a sua solução é determinada e definida, e não admite nenhuma outra.

198. Um problema que oferece menos equações do que incógnitas é, em geral, **indeterminado.** E' assim denominado, porque não tem uma só solução, como os problemas determinados, mas admite um número ilimitado de soluções ou respostas.

199. Se um problema oferece mais equações do que incógnitas, empregam-se sòmente as equações necessárias para a solução, e desprezam-se as excedentes; e dêste modo, o problema ficará determinado, como vemos no exemplo seguinte:

Problema. Achar dois números cuja soma seja 8, a diferença 2, e o produto 15.

Solução. Seja x um dos números, e y o outro. Neste problema temos só duas incógnitas e três equações. Somando as duas primeiras equações, temos $x=5$, e, por conseguinte, $y=8-5=3$. A outra equação que é $xy=15$, embora seja exata, porque $5\times3=15$, foi desnecessária para a solução, pois não tivemos precisão dela para achar o valor das duas incógnitas.

$$\begin{aligned} x+y &= 8 \quad (1.^a) \\ x-y &= 2 \quad (2.^a) \\ \hline 2x &= 10 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Se o produto xy fosse diferente de 15, o problema dado não teria solução.

200. Se num problema só se puder estabelecer uma equação com duas incógnitas, como, por exemplo: $x-y=8$, êste problema terá forçosamente solução indeterminada; pois passando y para o 2.º membro, temos $x=8+y$. Ora fazendo $y=1$, x será igual a 9; fazendo $y=2$, x será igual a 10, e assim por diante como vemos na relação que está ao lado. Há, portanto, uma infinidade de pares de valores que se podem atribuir a x e a y, cada par de valores dando uma solução do problema.

$$\begin{aligned} x-y&=8 \\ 9-1&=8 \\ 10-2&=8 \\ 11-3&=8 \\ 12-4&=8 \\ 13-5&=8 \\ 14-6&=8 \\ 15-7&=8 \end{aligned}$$

Etc.

201. Se nos derem duas equações contendo três incógnitas como

$$\begin{aligned} (1.^a)\quad & x+3y+5z=41, \\ (2.^a)\quad & x+2y+3z=28, \\ \hline & y+2z=13. \end{aligned}$$

podemos eliminar a incógnita x subtraindo a segunda equação da primeira, mas o resultado será também indeterminado, porque apresenta uma só equação com duas incógnitas: $y+2z=13$.

Transpondo os termos desta equação, temos $y=13-2z$. Ora, se fizermos $z=1$, $2z=2$, e y será igual a 11; se fizermos $z=2$, $2z=4$, e y será igual a 9, e assim por diante, como vemos na relação que está ao lado.

$$\begin{aligned} y+2z&=13 \\ 11+2\ &=13 \\ 9+4\ &=13 \\ 7+6\ &=13 \\ 5+8\ &=13 \\ 3+10&=13 \\ 1+12&=13 \end{aligned}$$

Se nas duas equações acima substituirmos as incógnitas y e z pelos diversos valores que elas teem na relação, acharemos que x poderá ter os valores 3, 4, 5, 6, 7, ou 8, conforme os valores que substituirem y e z; e dêste modo a solução fica igualmente indeterminada. Portanto.

202. *Quando o número de incógnitas excede ao número das equações fornecidas pelo enunciado, o problema é indeterminado.*

203. Podemos obter uma solução ou resposta para um problema indeterminado, pelo seguinte processo:

Problema. Comprei 20 aves por Cr $20,00, sendo galinhas a $1,00, perús a $4,00, e frangos a $0,20; quantas aves comprei de cada preço?

Solução. Seja x o número das galinhas; y o número dos perús, e z o número dos frangos. Então,

a 1.ª equação é $1000x+4000y+200z=20000$,
a 2.ª equação é $x+ \quad y+ \quad z= \quad 20$.

Nota-se logo à primeira vista que êste problema é indeterminado, porque apresenta três incógnitas, mas oferece sòmente duas equações.

Simplificando a primeira equação, dividindo-a por 200, temos . . . . $5x+20y+z=100$,
subtraindo dela a segunda equação . . . . $x+ \quad y+z= \quad 20$,

temos a equação resultante . . . . $4x+19y= \ 80$.

Fazendo agora $x=1$ que é o menor número inteiro e positivo, temos $4x=4$, $19y=80-4=76$, e $y=76\div19=4$. Ora, sendo $x=1$ e $y=4$, segue-se que $z=20-1-4=15$, porque os três números devem somar 20. Então,

$x=$ 1 galinha	$ 1,00,
$y=$ 4 perús a $4,00	$ 16,00,
$z=$15 frangos a $0,20	$ 3,00,
20 aves por	$ 20,00.

Este sistema tem outras soluções ou respostas. Por exemplo: 1 perú $15\frac{1}{4}$ galinhas e $3\frac{3}{4}$ frangos. Mas essa solução e outras do sistema não convêm ao problema, que exige, pela sua natureza, uma solução inteira e positiva.

DEMONSTRAÇÕES ALGÉBRICAS

204. Todas as demonstrações que temos apresentado até aquí, são simples demonstrações aritméticas.

As demonstrações pròpriamente *algébricas* não podem ser apresentadas aos alunos senão depois que êles sabem operar com facilidade e precisão os diversos processos de uma equação do primeiro grau.

205. Vamos dar agora a demonstração algébrica de alguns teoremas e enunciados algébricos, começando pelos mais simples e fáceis de compreender, para que o aluno não ache dificuldade alguma no encadeamento dêstes raciocínios.

206. Teorema. Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fração por um mesmo número, mudaremos a forma, mas não alteraremos o valor da fração.

Demonstração algébrica. Seja $\frac{a}{b}$ a fração, e q o seu valor; temos portanto $\frac{a}{b}=q$. (1.ª igualdade).

Na fração $\frac{a}{b}$, a é o dividendo, b é o divisor, e o valor da fração é o quociente representado por q. Ora, como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, segue-se que $a=bq$. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por m, temos $am=bqm$. Dividindo agora os dois membros desta igualdade por bm, temos a 4.ª igualdade. Cancelando no segundo membro desta equação os fatores b e m que são comuns ao numerador e denominador (n.º **161**), resta q, isto é, $\frac{am}{bm}=q$. Este resultado mostra que a fração $\frac{a}{b}$, tendo ambos os termos multiplicados por m, não fica com o valor alterado, porque se conserva igual a q.

$$\frac{a}{b}=q \qquad (1.^a)$$
$$a=bq \qquad (2.^a)$$
$$am=bqm \qquad (3.^a)$$
$$\frac{am}{bm}=\frac{bqm}{bm} \qquad (4.^a)$$
$$\frac{am}{bm}=q. \qquad (5.^a)$$

Ficou pois demonstrado que $\frac{am}{bm}$ é igual a q; agora, reciprocamente, se dividirmos ambos os termos da fração $\frac{am}{bm}$ por m, ela ficará $\frac{a}{b}$; e como $\frac{a}{b}$ é igual a q, segue-se que o *valor de uma fração não se altera, quando multiplicamos ou dividimos ambos os seus termos pela mesma quantidade*.

207. Teorema. Se a mesma quantidade fôr adicionada a ambos os termos de uma fração própria, a nova fração resultante será maior do que a primeira; mas se a mesma quantidade fôr adicionada a ambos os termos de uma fração imprópria, a fração resultante será menor do que a primeira.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b}$ a fração própria, e m a quantidade que se adiciona a cada um de seus termos; então a fração resultante será $\frac{a+m}{b+m}$.

Reduzindo agora as duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{a+m}{b+m}$ ao mesmo denominador (n.º **153**); para determinar qual delas é a maior, teremos

$$\frac{a}{b}=\frac{ab+am}{b^2+bm} \quad \text{e} \quad \frac{a+m}{b+m}=\frac{ab+bm}{b^2+bm}.$$

Desde que o denominador é o mesmo em ambas as frações, a fração maior será a que tiver maior numerador. Se $\frac{a}{b}$ fôr fração própria, a deverá ser menor do que b, e am menor do que bm, e por conseguinte, $ab+am$ menor do que $ab+bm$, isto é, a fração resultante será maior do que a primeira.

Se $\frac{a}{b}$ fôr fração imprópria, é evidente que $ab+am>ab+bm$, isto é, a fração resultante será menor do que a primeira.

208. Teorema. Se um número dividir o dividendo e o divisor, dividirá também o resto, se o houver.

Demonstração. A demonstração dêste teorema baseia-se nos dois princípios seguintes:

1.° *A diferença entre duas quantidades inteiras deve ser uma quantidade inteira.*

2.° *O quociente de uma divisão exata deve ser um número inteiro.*

Seja pois ad o dividendo, bd o divisor, q o quociente e r o resto da divisão. Vamos demonstrar que d dividindo ad e bd, dividirá também r.

Como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente e mais o resto, temos $ad=bdq+r$ (1.ª igualdade). Tirando o valor de r temos a 2.ª igualdade. Dividindo os termos desta igualdade por d, temos a 3.ª igualdade. Cancelando agora nos dois termos do segundo membro o fator d que é comum ao numerador e ao denominador, temos $\frac{r}{d}=a-bq$.

$$ad=bdq+r \qquad (1.^a)$$

$$r=ad-bdq \qquad (2.^a)$$

$$\frac{r}{d}=\frac{a\not d}{\not d}-\frac{bq\not d}{\not d} \qquad (3.^a)$$

$$\frac{r}{d}=a-bq. \qquad (4.^a)$$

Esta última igualdade mostra-nos a diferença de dois números inteiros, que deve ser um número inteiro, como o quociente da divisão de r por d. Ora, se o quociente é inteiro, a divisão é exata, e r é então divisível por d. Portanto, *se um número dividir o dividendo e o divisor, dividirá também o resto se o houver.*

209. Teorema. O número que dividir dois outros dividirá também a diferença que houver entre êles.

Demonstração. Sejam a e b os dois números, e d o divisor de ambos; então, como d divide a e b, dividirá também $a-b$ que é a sua diferença.

Se d divide exatamente a e b, os quocientes q e q' hão de ser necessàriamente números inteiros.

Desde que $a=dq$ e $b=dq'$ segue-se que $a-b=dq-dq'$ (1.ª igualdade). Dividindo agora os dois membros da igualdade por d, temos a 2.ª igualdade. Cancelando agora nos dois termos do segundo membro desta igualdade o fator d que é comum ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade. Ora, como q e q' são números inteiros, a sua diferença também deve ser um número inteiro, e se o quociente de $\frac{a-b}{d}$ é um número inteiro, mostra que a divisão é exata, e que a diferença $a-b$ é divisível por d. Portanto, o *número que dividir dois outros números, dividirá também a diferença que houver entre êles.*

$$\frac{a}{d}=q \text{ ou } a=dq$$

$$\frac{b}{d}=q' \text{ ou } b=dq'$$

$$a-b=dq-dq' \qquad (1.^a)$$

$$\frac{a-b}{d}=\frac{dq}{d}-\frac{dq'}{d} \qquad (2.^a)$$

$$\frac{a-b}{d}=q-q' \qquad (3.^a)$$

As quatro operações sobre frações

210. Somar. Demonstrar que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$.

Demonstração. Em Álgebra bem como em Aritmética, as frações devem ter um denominador comum para se poder operar a adição e a subtração. As frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$, reduzidas ao mesmo denominador ficam $\frac{a^2}{ab}$ e $\frac{b^2}{ab}$ (Vêde n.° 153).

Seja pois $\frac{a^2}{ab}=m$, e $\frac{b^2}{ab}=n$.

Então $a^2+b^2=abm+abn$, 1.ª igualdade. Dividindo todos os termos desta igualdade por ab, temos a 2.ª igualdade. Cancelando agora nos termos do segundo membro os fatores a e b que são comuns ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade que apresenta a soma de $m+n$, valores das duas frações, igual a $\frac{a^2+b^2}{ab}$.

$$\frac{a^2}{ab}=m \;\therefore\; a^2=abm$$

$$\frac{b^2}{ab}=n \;\therefore\; b^2=abn$$

$$a^2+b^2=abm+abn \qquad (1.^a)$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{\not a\not b m}{\not a\not b}+\frac{\not a\not b n}{\not a\not b} \qquad (2.^a)$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=m+n.$$

Daquí concluímos que, *para se somar frações reduzem-se as mesmas a um denominador comum, e escreve-se a soma dos numeradores sôbre êle* (n.° 157).

211. Subtrair Demonstrar que $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Demonstração. As frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ reduzidas ao mesmo denominador, dão $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$.

Seja $\frac{ad}{bd}=m$, e $\frac{bc}{bd}=n$. Então temos $ad=bdm$, e $bc=bdn$ ou $ad-bc=bdm-bdn$. Dividindo todos os termos desta igualdade por bd temos a 2.ª igualdade. Cancelando os fatores comuns ao segundo membro, temos a 3.ª igualdade, que mostra que a diferença

$$\frac{ad}{bd}=m \;\therefore\; ad=bdm$$

$$\frac{bc}{bd}=n \;\therefore\; bc=bdn$$

$$ad=bdm, \text{ e } bc=bdn$$

$$(1.^a)$$

$$ad-bc=bdm-bdn$$

entre m e n, que são os valores das duas frações, é igual a $\frac{ad-bc}{bd}$. Daquí concluímos que *para se subtrair uma fração de outra, reduzem-se ambas a um denominador comum e escreve-se sôbre êle a diferença dos numeradores* (n.° 158).

$$\frac{ad-bc}{bd} = \frac{bdm}{bd} - \frac{bdn}{bd} \quad (2.^a)$$

$$\frac{ad-bc}{bd} = m - n. \quad (3.^a)$$

212. Multiplicar. Demonstrar que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} = m$, e $\frac{c}{d} = n$. Então temos $a = bm$, e $c = dn$, ou $ac = bmdn$, 1.ª igualdade. Dividindo os termos desta igualdade por bd, temos a 2.ª igualdade. Cancelando agora os fatores b e d que são comuns ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade que mostra que o produto de m por n, isto é, das duas frações, é igual a $\frac{ac}{bd}$. Daquí concluímos que *para se achar o produto de duas frações, multiplicam-se entre si os numeradores, e o mesmo se faz com os denominadores, e a fração resultante será o produto* (n.° 160).

$$a = bm, \text{ e } c = dn$$

$$a \times c = bm \times dn$$

$$ac = bmdn \quad (1.^a)$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{bmdn}{bd} \quad (2.^a)$$

$$\frac{ac}{bd} = mn. \quad (3.^a)$$

213. Dividir. Demonstrar que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} = m$, e $\frac{c}{d} = n$; Então temos $a = bm$, e $c = dn$, ou dividindo um pelo outro $\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn}$.

Multiplicando agora ambos os membros desta igualdade por $\frac{d}{b}$, temos a 2.ª igualdade. Cancelando no segundo membro os fatores b e d que são comuns ao numerador e ao denominador, temos a 3.ª igualdade que mostra que a divisão de m por n, que são os valores das duas frações, é igual a $\frac{ad}{bc}$. Ora, êste quociente é o produto do dividendo $\frac{a}{b}$ pelo divisor $\frac{c}{d}$ com os termos invertidos $\frac{d}{c}$. Daquí concluímos que *para se dividir uma fração por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas frações* (n.° 163).

$$a = bm, \text{ e } c = dn$$

$$\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn} \quad (1.^a)$$

$$\frac{a \times d}{c \times b} = \frac{bm \times d}{dn \times b} \quad (2.^a)$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}. \quad (3.^a)$$

214. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida terá uma só raiz, isto é, um só valor ou resposta que pode verificar a equação.

Demonstração. Seja x a quantidade desconhecida; a a soma dos coeficientes positivos de x; e $-c$ a soma dos coeficientes negativos: seja também b a soma das quantidades conhecidas que são positivas, e $-d$ a soma das que são negativas. Então temos o resultado que está ao lado. Fazendo agora $b-d=n$, e $a-c=m$, temos $x=\frac{n}{m}$.

$$ax - cx = b - d$$

$$x(a-c) = b - d$$

$$x = \frac{b-d}{a-c}.$$

Ora, desde que n dividido por m não pode ter senão um quociente, segue-se que *uma equação do primeiro grau com uma só incógnita, não pode ter senão uma raiz.*

Nota. Os exemplos que acabamos de expôr, habilitarão os alunos a compreender, sem dificuldade, as outras demonstrações algébricas que apresentaremos no desenvolvimento desta obra.

GENERALIZAÇÃO

215. Generalizar um problema é substituir os seus valores particulares, ou dados, por valores gerais representados por letras. O valor da incógnita, neste caso, vem representado por uma expressão algébrica ou *fórmula.*

216. A fórmula que exprime o valor da incógnita de um problema generalizado serve de regra geral para resolver problemas análogos, isto é, que apenas diferem no valor particular de seus dados.

217. Regra é a tradução de uma fórmula algébrica feita em linguagem comum. Assim a fórmula $\frac{ab}{a+b}$, traduzida ou expressa em linguagem comum, quer dizer: *O produto de* a *multiplicado por* **b** *dividido pela soma de* **a** *mais* **b.**

Vamos agora resolver alguns problemas generalizados para elucidar êste ponto.

Primeiro caso da generalização

217. Problema. A soma de dois números é 68, e a sua diferença é 20; quais são os números?

Solução. Seja x o número maior, e $x-20$ será o número menor. Pelas condições do problema, o número maior é 44, e o menor é 24.

$$x+x-20=68$$
$$2x=88$$
$$x=44$$
$$x-20=24.$$

Se tivessemos de resolver outros problemas desta natureza, em cada um dêles teríamos o mesmo trabalho.

Generalizemos, agora, estes problemas:

A soma de dois números é **s**, *e a sua diferença é* **d**; *quais são números?*

Solução. Seja x o número maior, e $x-d$ o número menor. Temos então a equação $x+x-d=s$. Resolvida a equação, vemos que o número maior é $\frac{s+d}{2}$, e o número menor é $\frac{s-d}{2}$.

$$x+x-d=s$$
$$x+x=s+d$$
$$2x=s+d$$
$$x=\frac{s+d}{2}$$
$$x-d=\frac{s-d}{2}.$$

A solução dêste problema generalizado apresenta duas fórmulas: uma é $\frac{s+d}{2}$, a outra é $\frac{s-d}{2}$.

Estas duas fórmulas estabelecem a seguinte regra da Aritmética:

Para acharmos dois números, quando conhecemos a sua soma e a sua diferença, ajuntaremos a metade da soma com a metade da diferença, e teremos o número maior; e subtraindo da metade da soma a metade da diferença, teremos o número menor.

218. Apliquemos agora estas fórmulas na solução dos seguintes problemas:

1. A soma de dois números é 100, e a sua diferença é 6; quais são os números?

Solução. Se substituirmos nas duas fórmulas as letras s e d pelos seus respectivos valores, teremos:

$$\frac{s+d}{2}=\frac{100+6}{2}=53 \text{ número maior,}$$
$$\frac{s-d}{2}=\frac{100-6}{2}=47 \text{ número menor.}$$

2. Dois números somam 44, e a sua diferença é 6; quais são os números? Resp. 25 e 19.

3. A soma das idades de um pai e seu filho é 85 anos; a diferença destas idades é 21 anos; quais são as suas idades? Resp. 53 e 32.

4. Dois batalhões teem 1550 soldados; a diferença de número entre um e outro batalhão é 70; quantos soldados tem cada batalhão? Resp. 810 e 740.

Segundo caso de generalização

219. Problema. Qual é o número que sendo dividido por 3 e por 5, a soma dos quocientes é 16?

Solução. Seja x o número requerido. Resolvida a equação, vemos que o valor de x é 30.

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=16$$
$$5x+3x=240$$
$$x=30.$$

Generalizemos agora este problema:

Qual é o número que, sendo dividido por **a** *e por* **b**, *a soma dos quocientes é* **c**?

Solução. Seja x o número requerido; a equação será então $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. Resolvida a equação, temos $x=\frac{abc}{a+b}$, isto é, o produto dos três dados divididos pela soma dos dois divisores.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$$
$$bx+ax=abc$$
$$x(b+a)=abc$$
$$x=\frac{abc}{b+a}.$$

Apliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Achar um número que dividido por 3 e por 7, a soma dos quocientes seja 20.

Solução. Substituindo na fórmula acima as letras a, b, e c pelos seus respectivos valores, temos:

$$\frac{abc}{b+a}=\frac{3\times7\times20}{3+7}=\frac{420}{10}=42.$$

2. Qual é o número que dividido sucessivamente por 4 e por 5, a soma destes quocientes é 45? Resp. 100.

3. Achar um número que dividido sucessivamente por 5 e por 6, a diferença destes quocientes seja 2?

Solução. Neste problema, como é dada a diferença entre quocientes, a fórmula, em vez da soma, deverá conter a diferença entre os divisores.

$$\frac{abc}{b-a}=\frac{5\times 6\times 2}{6-5}=\frac{60}{1}=60.$$

Terceiro caso de generalização

220. Problema. Uma lebre foge de um cão que a persegue a 60 metros de distância; o cão corre 40 metros por minuto, e a lebre corre 36; em quantos minutos o cão alcançará a lebre?

Solução. Seja x o número de minutos. O cão andando 40 metros por minuto, em x minutos anda $40x$. Por idêntica razão a lebre anda $36x$.

Para o cão alcançar a lebre, é necessário que êle vença os $36x$ que anda a lebre, e ainda os 60 metros que o separam dela. Pelas condições do problema, a equação deve ser $40x=36x+60$. Resolvida a equação, vemos que o número de minutos requerido é 15.

$$40x=36x+60$$
$$40x-36x=60$$
$$4x=60$$
$$x=15.$$

Generalizemos êste problema, substituindo as quantidades particulares 60, 40 e 36, pelas quantidades gerais a, m e n.

Solução. Temos a equação $mx=nx+a$; resolvida esta equação, temos a fórmula $\frac{a}{m-n}$ que resolve todos os problemas desta natureza, e que, traduzida em linguagem comum, quer dizer:

A distância dividida pela diferença das velocidades, dá o tempo requerido.

$$mx=nx+a$$
$$mx-nx=a$$
$$x(m-n)=a$$
$$x=\frac{a}{m-n}.$$

Apliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Do porto do Rio de Janeiro saiu um vapor navegando 12 milhas por hora; quando já tinha alcançado a distância de 72 milhas, saiu do mesmo porto outro vapor no mesmo rumo, navegando 16 milhas por hora; em quantas horas o último vapor alcançou o primeiro?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{72}{16-12}=\frac{72}{4}=18$ horas.

2. Um gavião vendo uma pomba que estava a 80 metros de distância dêle, voou para alcançá-la; no mesmo instante a pomba fugiu do gavião; ora, voando o gavião em cada minuto mais 8 metros do que a pomba, em quantos minutos a alcançaria?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{80}{8}=10$ minutos.

3. Entre dois viajantes que seguem a mesma direção pela mesma estrada, há uma distância de 56 quilometros; o que vai na frente anda 6 quilômetros por hora, e o outro 10; em quantas horas este alcançará aquele?

Solução. $\frac{a}{m-n}=\frac{56}{10-6}=\frac{56}{4}=14$ horas.

Quarto caso de generalização

221. Problema. Um homem pode fazer um trabalho em 8 dias; outro o pode fazer em 12 dias; trabalhando juntos, em quantos dias o poderão fazer?

Solução. Seja x o número de dias requerido; como um homem faz o trabalho em 8 dias, em um dia fará $\frac{1}{8}$ do trabalho, e em x dias fará $\frac{x}{8}$. Por semelhante razão, o outro homem fará $\frac{x}{12}$. Ora como ambos fazem o trabalho, que é 1 inteiro, segue-se que a equação deve ser $\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1$, que dá $x=4\frac{4}{5}$ dias.

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=1$$
$$3x+2x=24$$
$$5x=24$$
$$x=4\tfrac{4}{5}$$

Generalizando agora êste problema, substituindo os valores particulares 8 e 12 pelos valores gerais a e b, temos a equação ao lado que, resolvida, nos dá a fórmula $\frac{ab}{a+b}$ que resolve todos os problemas desta natureza.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$$
$$ax+bx=ab$$
$$x(a+b)=ab$$
$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Apliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Um tanque tem duas torneiras; uma o pode encher em 6 horas, e a outra em 9 horas; abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas o tanque ficará cheio?

Solução. $\frac{ab}{a+b}=\frac{6\times 9}{6+9}=\frac{54}{15}=3\frac{3}{5}$ horas.

2. Uma vaca pode comer um saco de farelo em 7 dias, e um boi pode comê-lo em 5 dias; em quantos dias o poderão comer ambos?

Solução. $\frac{ab}{a+b}=\frac{7\times5}{7+5}=?$ Resp. $2\frac{11}{12}$.

3. *A* pode fazer uma obra em 10 dias e *B* pode fazê-la em 20 dias; em quantos dias a poderão fazer os dois trabalhando juntos ? Resp. $6\frac{2}{3}$.

Nota. Poderíamos apresentar ainda muitos outros casos de generalização; estes, porém são suficientes, para nos mostrar que as mais importantes regras da Aritmética são baseadas nas fórmulas obtidas na solução dos problemas generalizados.

FORMAS DA SOLUÇÃO

222. A solução de um problema pode aparecer com uma das *cinco* formas seguintes denominadas:

1.ª Solução positiva,
2.ª Solução negativa,
3.ª Solução infinita,
4.ª Solução zero,
5.ª Solução indeterminada.

Consideremos cada uma destas soluções separadamente.

Solução positiva

223. Solução positiva é aquela que temos obtido em todos os problemas resolvidos até esta pagina. A solução positiva dá à incógnita um valor positivo que satisfaz perfeitamente todas as condições do problema, como podemos reconhecer por meio de uma verificação.

Se algumas vezes a incógnita e o seu respectivo valor aparecem com o sinal negativo, como: $-x=-4$, isto provém da inversão na ordem dos membros da equação; mas êste resultado se corrige fàcilmente, e a solução se torna positiva, mudando a ordem dos termos da solução, como: $4=x$, ou mudando os sinais de ambos os termos, como: $x=4$. Com estas mudanças a equação não sofre alteração alguma, como ficou exposto na secção n.º **176**, *Regra*. (Vêde n.º **185**; VII-Prob.).

Esta é a solução natural que os discípulos já conhecem, porque a teem obtido em todos os problemas já resolvidos, e por isso não precisam de mais esclarecimentos sôbre ela.

Passemos pois, às outras soluções que ainda são desconhecidas.

Solução negativa

224. Já vimos na secção n.º **11** que, quando uma quantidade não tem sinal algum, subentende-se o sinal positivo +, e que todas as quantidades são consideradas positivas, se não forem de outro modo designadas. Do mesmo modo, o valor da incógnita é considerado positivo, quando a incógnita também o é. Assim $x=8$ quer dizer $+x=+8$.

225. Algumas vezes, porém, acontece que, na solução de um problema, a incógnita aparece com valor negativo, como $x=-4$. A êste resultado dá-se o nome de **solução negativa.**

Exemplifiquemos êste caso com o seguinte problema: *Em um armazém há um certo número de sacas de café; o triplo dêsse número menos 100 é igual a quatro vezes o seu número mais 200; qual é o número de sacas?*

Solução. Seja x o número das sacas; então temos a seguinte
equação $4x+200=3x-100$,
transpondo $4x-3x=-100-200$,
reduzindo $x=-300$.

O resultado $x=-300$, ainda que satisfaça a equação do problema, não satisfaz o problema, porque em um armazém não pode haver -300 sacas de café. Essa solução mostra, pois, que ha algum defeito ou engano no enunciado, ou então se dá uma interpretação errada ao problema. Estes erros podem ser fàcilmente corrigidos.

Neste problema, o engano está na troca dos sinais, pois em lugar de $+200$, e -100, deve ser -200, e $+100$. Corrigindo, assim, este problema, a equação será $4x-200=3x+$ $+100$, e $x=300$, isto é, a solução positiva.

226. Problema. *A idade de um pai é 40 anos, e a de seu filho é 13; em que época a idade do pai será o quádruplo da idade do filho?*

Solução. Seja x o número de anos que faltam para chegar a época requerida. Nessa data a idade do filho será $13+x$ e a do pai $40+x$. Como esta deve ser o quádruplo da outra a equação será $4(13+x)=40+x$. Resolvida a equação, temos $x=-4$.

Este resultado negativo nos mostra que há algum engano a corrigir. Pela simples lei-

1.ª Equação

$$4(13+x)=(40+x)$$
$$52+4x=40+x$$
$$3x=-12$$
$$x=-4.$$

tura dêste problema, fomos levados a julgar erradamente que essa relação de idades se efetuaria em uma época posterior aos 40 anos do pai e não antes.

Se o enunciado dissesse: «*Em que época a idade do pai foi o quádruplo da idade do filho?*» logo compreenderíamos que era em uma época anterior aos 40 anos, e teríamos formulado a 2.ª equação, cujo resultado mostra que a época requerida no problema, foi quando o pai tinha 40—4=36 anos, e o filho 13—4=9.

2.ª Equação

$$4(13-x)=(40-x)$$
$$52-4x=40-x$$
$$-3x=-12$$
$$x=4.$$

Nesta solução vemos que a falta de clareza no problema, levou-nos a uma interpretação errada, do que fomos logo advertidos pela solução negativa $x=-4$.

227. Os exemplos que temos apresentado, fundamentam os dois seguintes princípios:

1.° *Uma solução negativa indica em geral alguma troca de sinais ou outro defeito no enunciado do problema.*

2.° *Quando se obtém uma solução negativa, o enunciado do problema pode ser corrigido trocando-se os sinais ou modificando-se o sentido que se lhe deu, de sorte que a solução exprima exatamente o valor da incógnita no sentido positivo.*

Solução infinita

228. A palavra *infinito* tem diversos sentidos. Em Álgebra, ela tem uma significação particular que não pode ser fàcilmente compreendida senão depois de termos uma idéia clara da matéria da sua aplicação. E' pois conveniente estudarmos primeiro o caso em que êste termo é aplicado, para depois compreendermos fàcilmente a definição que se lhe dá no sentido algébrico.

229. Quando os dois termos de uma fração qualquer são quantidades finitas e bem determinadas, a fração deverá ter também um valor finito e determinado. Assim o valor da fração $\frac{a}{b}$ é o quociente de a dividido por b. Mas se um ou ambos os termos desta fração forem substituidos por zeros, os quocientes ou resultados serão

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{0}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{0}{0}.$$

Examinemos separadamente cada uma destas expressões algébricas, para vermos o valor ou significação que devem ter.

230. Uma fração algébrica é uma divisão, e em uma divisão, é evidente que, quanto menor fôr o divisor, tanto maior será o quociente.

Se na fração $\frac{a}{b}$, o dividendo fôr constante, e o divisor fôr diminuindo de valor, o quociente irá crescendo sempre à medida que o divisor fôr diminuindo. Se o divisor fôr reduzido a um décimo, a um centésimo ou a um milésimo do seu valor, o quociente se tornará dez, cem ou mil vezes maior.

Se o divisor b fôr reduzido a um milionésimo, o quociente se tornará um milhão de vezes maior, porque $\frac{a}{0{,}000001}=$ $=1000000\ a$ ou um milhão de vezes o valor de a; se o divisor se tornar ainda menor, o quociente se tornará ainda maior. De modo que, se o divisor se tornar a menor quantidade assinalável, isto é, o menor de todos os números, o quociente se tornará a maior quantidade assinalável, isto é, o maior de todos os números. E se o divisor descer a zero, limite sem valor algum, o quociente tocará no extremo oposto que é o *infinito*, e se tornará uma *quantidade infinita*.

231. Para se exprimir em Álgebra êste quociente, emprega-se o símbolo ∞ que se chama *infinito*.

De sorte que $\frac{a}{0}=\infty$ lê-se *A quantidade* **a** *diferente de* 0 *dividida por zero é igual ao infinito.*

Em Álgebra portanto, uma quantidade infinita quer dizer: *uma grandeza maior do que qualquer outra grandeza assinalável da mesma espécie.*

232. Na solução de um problema, quando o valor da incógnita aparece com a formula de $\frac{a}{0}=\infty$, devemos entender por esta expressão algébrica que não há valor algum finito que satisfaça as condições do problema, isto é, não há número algum que multiplicado por zero, dê um produto igual à quantidade a; por êste motivo, esta solução se denomina **solução infinita** ou mais pròpriamente **solução impossível**, porque é esta idéia que, em geral, ela exprime.

Nota. No capítulo denominado *Discussão dos problemas* veremos êste caso exemplificado, bem como os casos das outras soluções.

Solução zero

233. Se na fração $\frac{a}{b}$, o denominador b fôr constante, e o numerador a fôr diminuindo de valor, o quociente ou valor da fração irá também diminuindo. Assim as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{6}$ teem um denominador igual, mas porque o numerador vai diminuindo de valor, cada uma destas frações é menor que a precedente.

Portanto, se o numerador a diminuir de valor, e se tornar o menor dos números, o valor da fração diminuirá do mesmo modo; e finalmente se o numerador descer a zero, a fração $\frac{a}{b}$ ficará reduzida também a zero e se exprimirá: $\frac{0}{b}=0$, que se lê: *Zero dividido pela quantidade* **b** *(diferente de 0) é igual a zero.*

234. Quando, pois, o resultado da solução de um problema aparece com a forma $\frac{0}{b}$, chama-se **solução** *nula* ou **zero.**

Solução indeterminada

235. Se na fração $\frac{a}{b}$ ambos os termos forem substituídos por zeros, o resultado será $\frac{0}{0}$. Ora, zero dividido por zero, não tem em Aritmética significação alguma, mas em Álgebra, tem uma significação importante que deve ser perfeitamente conhecida.

236. Quando o valor da incógnita em uma equação do primeiro grau aparece com a forma $\frac{0}{0}$, qualquer quantidade pode satisfazer as condições do problema. Com efeito, numa divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente; ora, desde que qualquer número, multiplicado pelo divisor zero, dá um produto igual ao dividendo zero ($0=0\times x$), segue-se que o símbolo $\frac{0}{0}$ exprime uma quantidade qualquer. Por isso, o resultado $\frac{0}{0}$ chama-se **solução indeterminada,** porque exprime uma quantidade indeterminada, isto é, um número qualquer.

237. Algumas vezes o valor da incógnita apresenta-se com a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, sem contudo o ser, como vemos no exemplo seguinte:

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}.$$

Se dermos à quantidade a o valor de 4, a^2 será 16, e então teremos

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}=\frac{16-16}{4-4}=\frac{0}{0}.$$

Mas se simplificarmos a fração, suprimindo o fator $(a-4)$ que é comum ao numerador e ao denominador, teremos o seguinte resultado:

$$x=\frac{a^2-16}{a-4}=\frac{(a-4)\ (a+4)}{a-4}=a+4.$$

Ora, como demos a a o valor de 4, segue-se que o verdadeiro valor de x é $4+4=8$.

Podemos evitar fàcilmente êste engano, se, antes de darmos a solução por concluída, reduzirmos o valor da incógnita à sua expressão mais simples, suprimindo os fatores comuns ao numerador e ao denominador.

238. Quando a forma $\frac{0}{0}$ ou $0=0$ aparece como o resultado da solução algébrica de um problema, quer dizer que a **solução** é **indeterminada.**

239. Se dermos à letra n um valor qualquer, teremos a seguinte tabela resumida das expressões algébricas das diversas soluções.

Solução positiva, $x = n$	Solução zero, $x=\frac{0}{n}$
Solução negativa, $x = -n$	Solução indeterminada, $x=\frac{0}{0}$
Solução infinita, $x=\frac{n}{0}=\infty$	

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS

240. Quando um problema se apresenta generalizado, isto é, quando suas quantidades conhecidas estão representadas por letras (n.° **215**), podemos indagar quais serão os diversos resultados da solução dêsse problema, se atribuirmos a essas quantidades valores particulares.

241. Discutir um problema é atribuir valores particulares às suas quantidades generalizadas, e depois interpretar os seus resultados.

A discussão do seguinte problema nos dará o esclarecimento necessário para compreendermos devidamente êste ponto:

Problema. *Dois correios partiram ao mesmo tempo de dois lugares A e B que distam* **a** *milhas um do outro; seguindo ambos a mesma direção, o 1.° andava* **m** *milhas por hora, e o 2.°* **n** *milhas; em quantas horas um alcançará o outro?*

Solução. Há muitos modos de resolver êste problema; aquí daremos o mais fácil.

Seja x o número de horas requerido; como um correio anda m milhas por hora, em x horas, êle andará mx; por semelhante razão, o outro correio andará nx. Como ignoramos os valores de m e n, suponhamos $m > n$.

O correio que anda mx, para alcançar o outro, tem de vencer a distância a, e ainda a distância nx que o outro correio anda. A equação deve ser portanto, $mx=nx+a$, e o resultado, $x=\frac{a}{m-n}$

Equação

$$mx=nx+a$$
$$mx-nx=a$$
$$x(m-n)=a$$
$$x=\frac{a}{m-n}.$$

242. Discussão do problema. A resposta, que é o número de horas necessárias ao encontro, aparece com a forma $\frac{a}{m-n}$, isto é, a distância que separa inicialmente os dois trens, dividida pela diferença entre as velocidades $m-n$.

Ora a solução $\frac{a}{m-n}$ pode ter cinco resultados ou formas diversas, segundo os valores que atribuirmos às letras a, m e n.

1.ª Forma. Suponhamos que as três quantidades a, m e n sejam positivas e que m seja maior do que n. Neste caso o número de horas requerido no problema será uma quantidade positiva, porque sendo $m>n$, a diferença entre estas duas quantidades será positiva; e a quantidade a dividida por um divisor positivo, dará um quociente positivo.

Ora, isto é evidente das circunstâncias do problema, porque se o correio que vai atrás é mais veloz do que o que vai adiante, é claro que a distância que os separa, irá diminuindo, e no fim de certo número de horas, essa distância desaparecerá, e êles ficarão juntos. Poderemos fazer esta verificação com valores particulares. Se dermos às letras a, m e n os valores 20, 8 e 4, teremos o seguinte resultado:

$$x=\frac{a}{m-n}=\frac{20}{8-4}=\frac{20}{4}=5 \text{ horas.}$$

Isto quer dizer que, se a distância que separa os correios fôr de 20 milhas, e um andar 8 milhas por hora, e outro 4, êles estarão juntos no fim de 5 horas. Nesta suposição a **solução é positiva.**

2.ª Forma. Suponhamos agora que m seja menor do que n. Neste caso, o valor de x será negativo, porque, sendo n maior do que m, o resultado de $m-n$ será negativo, e a quantidade positiva a dividida por $m-n$ dará um quociente negativo.

Poderemos verificar facilmente êste resultado por meio de algarismos. Como n é maior do que m, daremos a m o valor 4, e a n o valor 8. Então,

$$x=\frac{a}{m-n}=\frac{20}{4-8}=\frac{20}{-4}=-5, \text{ isto é, } x=-5.$$

Ora quando o valor da incógnita aparece negativo, mostra que há no problema algum defeito que deve ser corrigido. Nesta suposição dos valores, o defeito é evidente, porque se o correio que vai adiante, é mais veloz do que o que vai atrás, é claro que este nunca poderá alcançar aquele; e quanto mais caminharem, maior distância os separará. Neste caso a **solução é negativa,** e mostra que o problema deve ser modificado para ter uma solução positiva.

Pela simples leitura do problema, compreendemos que os dois correios seguiam a direção:

A.........B........ —⪢

mas o problema não dizendo qual dêles ia adiante ou atrás, não nos autoriza a pensar assim, e por isso podemos modificar o sentido da direção fazendo-os seguir em caminho oposto:

⪡— ....A........B

e dêste modo a solução se tornará positiva, porque sendo $n>m$, a diferença $(n-m)$ será positiva, e a quantidade a dividida por um divisor positivo dará um quociente positivo.

3.ª Forma. Suponhamos que m seja igual a n, isto é, que os dois correios andem com igual velocidade. Neste caso, o número de horas, que é o valor da incógnita, será infinito,

porque sendo $m=n$, então $\frac{a}{m-n} = \frac{a}{0} = \infty$, isto é, será igual ao infinito, como já demonstrámos nas secções **230** e **231**.

Nesta suposição dos valores do problema, a **solução é infinita,** e não pode ser outra, porque se os dois correios estão separados por uma certa distância, e andam na mesma direção, e com igual velocidade, é certo que nunca poderão ficar juntos, pois, por mais que caminhem, a mesma distância os separará.

Em linguagem matemática, diz-se que os dois correios ficarão juntos *a uma distância infinita do ponto da partida.* Mas esta expressão quer simplesmente dizer em linguagem comum, que êles nunca se encontrarão, ou que é impossível encontrarem-se.

4.ª Forma. Suponhamos ainda que a seja zero, isto quer dizer que não haja distância alguma entre os dois correios. Neste caso, o número de horas requerido será também zero, porque a solução $x=\frac{a}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{m-n}$, e nós já demonstrámos que zero dividido por uma quantidade qualquer, é igual a zero (n.º **233**).

Ora êste resultado é evidente na solução, porque se não há distância alguma entre os dois correios, é porque êles estão juntos, e se estão juntos, não há necessidade de tempo algum para um alcançar o outro. Nesta suposição dos valores, a **solução é zero.**

5.ª Forma. Suponhamos finalmente que a seja zero e m igual a n; neste caso, o número de horas requerido será indeterminado, porque a solução $\frac{a}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{0}$, símbolo que significa uma quantidade indeterminada, como já demonstrámos (n.º **236**).

Este resultado é evidente das condições que supomos no problema, porque se os dois correios estão juntos e caminham com igual velocidade, é certo que, desde a partida, êles estarão juntos na primeira hora de caminho, na segunda, na terceira e em todo o tempo que caminharem nestas condições; por isso, qualquer número de horas satisfará as condições do problema. Esta **solução é indeterminada.**

Vemos pois, que, atribuindo-se às quantidades generalizadas a, m e n dêstes problemas valores particulares, as formas da solução teem um resultado completamente distinto.

DESIGUALDADES

243. Desigualdade algébrica é uma expressão que apresenta duas quantidades unidas pelo sinal $>$ ou $<$. O sinal $>$ indica que a primeira quantidade é *maior do que* a segunda; o sinal $<$ indica que a primeira é *menor do que* a segunda. Assim a desigualdade

$$3+5 > 7-2$$

lê-se: *três mais cinco maior do que sete menos dois.*

O termo ou termos que vão antes do sinal, formam o primeiro membro da desigualdade, e os que vão depois, formam o segundo membro.

Na discussão dos problemas, muitas vezes é necessário comparar quantidades desiguais para determinar os valores das quantidades desconhecidas, e estabelecer certas relações entre elas.

244. Duas ou mais desigualdades estão no mesmo sentido, quando em todas elas o primeiro membro é maior do que o segundo, ou quando em todas o segundo membro é maior do que o primeiro. Assim, as desigualdades $15 > 12$, $7 > 5$ e $4 > 1$ estão no mesmo sentido; e as desigualdades $5 < 8$, $9 < 11$ e $13 < 15$ estão também no mesmo sentido.

Duas desigualdades estão em **sentido contrário,** quando em uma delas o primeiro membro é maior do que o segundo, e na outra, o segundo membro é maior do que o primeiro, como $15 > 12$ e $11 < 14$.

245. Para notarmos com mais clareza a diferença entre os valores positivos e negativos expressos em uma desigualdade, observaremos a seguinte escala descendente que mostra a relação de valores dependentes do sinal que afeta uma quantidade.

(Números positivos)	(Números negativos)
$+5, +4, +3, +2, +1,$	$0, -1, -2, -3, -4, -5.$

Visto que esta escala é descendente, notamos nela os

três seguintes fatos que servem de base para as operações da desigualdade:

1.º Qualquer número positivo é maior do que zero.

2.º Zero é maior do que qualquer número negativo.

3.º Entre dois números negativos, o maior é o que tem o valor absoluto menor.

Assim, $+1>0$, isto é, 1 positivo é maior do que zero.
$0>-1$, isto é, zero é maior do que 1 negativo.
$-2>5$, isto é, 2 negativo é maior do que 5 negativo.

246. Quasi todas as alterações que efetuamos nas equações do primeiro grau, podem ser também operadas nas desigualdades, como vamos reconhecer nos seguintes princípios:

1.º Se juntarmos o mesmo número ou a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade, ou se de ambos os membros subtrairmos o mesmo número, a desigualdade não mudará de sentido.

Ilustração. Se a cada membro da desigualdade $7>5$ adicionarmos 4, teremos a desigualdade $7+4>5+4$ que simplificada dá $11>9$. Se subtrairmos 4, teremos $7-4>5-4$ ou $3>1$. As desigualdades obtidas foram, portanto, do mesmo sentido da desigualdade dada.

Isto é intuitivo, porque se a cada um dos membros da desigualdade $a>b$ adicionarmos ou subtrairmos a quantidade m, teremos $a+m>b+m$ ou $a-m>b-m$; ora a desigualdade entre a e b ficará a mesma, desde que ambos os membros tenham o mesmo aumento ou diminuição.

247. *2.º Qualquer termo de um membro pode ser mudado para o outro membro, trocando-se-lhe o sinal.*

Ilustração. Estabelecendo a desigualdade $a^2+b^2>2ab+c^2$, acrescentando $-2ab$ a ambos os membros, temos $a^2+b^2-2ab>2ab-2ab+c^2$; ou, reduzindo os termos, $a^2-2ab+b^2>c^2$.

Vemos aquí o termo $-2ab$ mudado de um membro para o outro, ficando com o sinal trocado.

248. *3.º Se os dois membros de uma desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo número positivo, a desigualdade continuará no mesmo sentido.*

Ilustração. Se multiplicarmos por 3 ambos os membros da desigualdade $8>4$, teremos $8\times3>4\times3$ ou $24>12$. Se os dividirmos por 2, teremos $8\div2>4\div2$ ou $4>2$. Em ambos os casos obtivemos desigualdades do mesmo sentido da desigualdade dada.

Mas se os dois membros da desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo número negativo, a desigualdade resultante mudará de sentido.

Ilustração. Se multiplicarmos ambos os membros de $8>5$ por -2, teremos no 1.º membro $8\times(-2)$ ou -16 e no 2.º membro $5\times(-2)$ ou -10; mas como já vimos entre duas quantidades negativas a maior é a que tem o valor numérico menor resulta $-16<-10$, isto é, a desigualdade mudou de sentido.

O mesmo resultado se observa na divisão.

249. *4.º Se mudarmos os sinais de todos os termos de ambos os membros de uma desigualdade, ela ficará com o sentido contrário, porque trocar os sinais equivale a multiplicar todos os seus termos por -1.*

Ilustração. Assim, na desigualdade $8+3-2>2+3-1$, mudando o sinal dos termos, temos $-8-3+2<-2-3+1$, reduzindo os termos, temos $-9<-4$.

Na desigualdade que serve de exemplo, é maior o primeiro membro, mas sendo trocados os sinais, fica maior o segundo membro, e por isso fica em sentido contrário, pois -4 é maior do que -9.

250. *5.º Se duas desigualdades de mesmo sentido forem somadas membro a membro, a desigualdade resultante terá o sentido comum.*

Ilustração. A soma das desigualdades $7>3$ e $4>1$ é $7+4>3+1$ ou $11>4$. Este enunciado é intuitivo, porque os membros da esquerda, sendo maiores do que os da direita, a soma daqueles será também maior do que a dêstes.

Mas se nas duas desigualdades, em vez da adição, operarmos a subtração, o resultado pode ser no mesmo sentido, no sentido contrário ou resultar uma igualdade.

Ilustração. Os três exemplos seguintes de subtração mostram êste princípio:

(Mesmo sentido)	(Sentido contrario)	Igualdade
$7>3$	$10>9$	$10>9$
$4>1$	$8>3$	$8>7$
$3>2$	$2<6$	$2=2$

Generalizando êste princípio podemos estabelecer que de $a>b$ subtraindo $c>d$, o resultado, segundo os valores particulares de a, b, c e d, poderá ser $a-c>b-d$, $a-c<b-d$ ou $a-c=b-d$.

251. Resolver uma desigualdade é determinar o limite superior ou inferior do valor que a incógnita pode ter para satisfazer as condições apresentadas em um problema.

252. Em geral resolve-se uma desigualdade do mesmo modo que uma equação do primeiro grau observando os princípios que acabámos de expor.

I Problema. Achar um número cujo triplo menos 4 seja maior do que o mesmo número e mais 6.

Solução. Seja x o número requerido, e pelas condições do problema, temos a seguinte desigualdade .... $3x-4>x+6$,
transpondo os termos, temos .... $3x-x>6+4$,
reduzindo os termos e dividindo .... $x>5$.

Sendo o número maior do que 5, pode ser qualquer inteiro ou misto superior a 5, visto não ter outro limite.

253. Se um problema de desigualdade oferecer duas condições, poderá em uma, a incógnita apresentar o limite superior, e em outra, o limite inferior.

II Problema. Cinco vezes certo número e mais 4 é maior do que duas vezes êsse número e mais 19; e cinco vezes êsse número menos 4 é menor que quatro vezes o número e mais 4. Requer-se o número.

Solução. Seja x o número requerido no problema.
A primeira condição é .... $5x+4>2x+19$ (1ª)
A segunda condição é...................... $5x-4<4x+4$ (2ª)

	(1ª)	(2ª)
Transpondo os termos em ambas	$5x-2x>19-4$,	$5x-4x<4+4$.
reduzindo os termos	$3x>15$,	$x<8$.
dividindo a (1ª) por 3	$x>5$.	

Desde que x deve ser um número maior do que 5, e menor do que 8, segue-se que êsse número pode ser 6, 7, ou qualquer outro número misto contanto que fique entre 5 e 8.

III Problema. Demonstrar que a soma dos quadrados de duas quantidades desiguais é maior do que duas vezes o produto dessas quantidades, isto é, que $a^2+b^2>2ab$.

Demonstração. Desde que o quadrado de um número, positivo ou negativo, é sempre uma quantidade positiva, como vimos na regra dos sinais; e como qualquer número positivo é maior do que zero (**n. 245**), segue-se que $a^2-2ab+b^2$ que é o quadrado de $(a-b)$, é maior do que zero.

Portanto.......................... $a^2-2ab+b^2>0$,
juntando $2ab$ a ambos os membros .. $a^2-2ab+2ab+b^2>0+2ab$,
reduzindo os termos .... $a^2+b^2>2ab$.
Fica, portanto, demonstrado que a^2+b^2 é maior do que $2ab$.

Regra. *Para resolvermos uma desigualdade, faremos todas as transformações necessárias para achar o limite da incógnita, operando como nas equações do primeiro grau.*

Resolver os seguintes problemas:

4. Se $4x-7<2x+3$, e se $3x+1>13-x$, que valor se pode dar a x? Resp. $5>x>3$.

5. Achar o limite de x na desigualdade $7x-3>32$. Resp. $x>5$.

6. Achar o limite de x em $5+\frac{x}{3}<8+\frac{x}{4}$. Resp. $x<36$.

7. O dôbro de certo número e mais 7 é menor que 19; e o seu triplo menos 5 é menor que 10. Requer-se o número. Resp. ?

8. Determinar quanto a soma a^2+b^2 excede ao produto $2ab$. Resp. $(a-b)^2$.

FORMAÇÃO DAS POTÊNCIAS

254. A palavra **potência** é usada em Álgebra para significar o produto de uma quantidade multiplicada por si mesma um certo número de vezes.

255. Chama-se **potenciação** a operação pela qual se formam as potências de uma quantidade. Esta quantidade é a **base** da potência.

256. Qualquer quantidade é geralmente considerada como a primeira potência de si mesma.

257. **A segunda potência** também se chama **quadrado.**

258. **A terceira potência** também se chama **cubo.**

259. Chama-se **expoente** o número escrito no alto direito de uma quantidade para mostrar o grau da sua potência, isto é, quantas vezes ela tem de ser tomada como fator. Assim,

A 1.ª potência de 3 é 3 ou 3^1.
A 2.ª potência de 3 é $3\times3=3^2=9$.
A 3.ª potência de 3 é $3\times3\times3=3^3=27$.
A 4.ª potência de 3 é $3\times3\times3\times3=3^4=81$.
A 2.ª potência de x é $x\times x=x^2$.
A 3.ª potência de x é $x\times x\times x=x^3$.
A 4.ª potência de x é $x\times x\times x\times x=x^4$, etc.

Elevação de um monômio a qualquer potência

260. Problema. Qual é a terceira potência de $2ab^2$?

Solução. Segundo a definição, a terceira potência de $2ab^2$ deve ser o produto desta quantidade tomada três vezes como fator. Então,

$$(2ab^2)^3=2ab^2\times 2ab^2\times 2ab^2=2\times 2\times 2\times aaa\times b^2b^2b^2 \text{ ou}$$
$$=2^3a^3b^6=8a^3b^6$$

Neste exemplo vê-se que o coeficiente 2 se eleva à terceira potência e fica 8, e às letras a e b^2 se lhes dá três vezes os seus expoentes ou se multiplicam estes por 3, e ficam a^3b^6.

261. Nos sinais das potências há dois casos a considerar, que são:

1.° Quando uma quantidade é positiva.

2.° Quando uma quantidade é negativa.

262. Primeiro caso. Quando uma quantidade é positiva, dará todas as suas potências positivas, porque, seja qual fôr o número de vezes que ela entre como fator, o produto será sempre positivo; pois $+$ multiplicado por $+$ dá $+$. Assim,

$(+a)\times(+a)=+a^2$, e também $(+a)\times(+a)\times(+a)=+a^3$.

263. Segundo caso. Quando uma quantidade é negativa, temos os seguintes resultados:

$(-a)\times(-a)=+a^2$; a 2.ª potência é positiva.

$(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^3$; a 3.ª potência é negativa.

$(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=+a^4$; a 4.ª potência é positiva.

$(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^5$; a 5.ª potência é negativa.

Daqui concluímos que o produto de um número **par** de fatores negativos é positivo; e o produto de um número **ímpar** de fatores negativos é negativo. Por isso as potências pares de uma quantidade negativa são todas positivas, e as potências ímpares são negativas.

Regra. *Para se elevar um monômio a qualquer potência, eleva-se o coeficiente numérico ao grau requerido, e multiplica-se o expoente de cada letra pelo expoente da potência. E, se o monômio for positivo, todas as potências serão positivas; mas se fôr negativo, todas as potências pares serão positivas, e todas as potências ímpares serão negativas.*

		Respostas
1.	Achar o quadrado de $3ax^2y^3$.	$9a^2x^4y^6$.
2.	Achar o quadrado de $5b^2c^3$.	$25b^4c^6$.
3.	Achar o cubo de $2x^2y^3$.	$8x^6y^9$.
4.	Achar o quadrado de $-ab^2c$.	$a^2b^4c^2$.
5.	Achar o cubo de $-abc^2$.	$-a^3b^3c^6$.
6.	Achar a quarta potência de $3ab^3c^2$.	$81a^4b^{12}c^8$.
7.	Achar a quarta potência de $-3ab^3c^2$.	$81a^4b^{12}c^8$.
8.	Achar a quinta potência de ab^3cd^2.	$a^5b^{15}c^5d^{10}$.
9.	Achar a quinta potência de $-ab^3c^2$.	$-a^5b^{15}c^{10}$.
10.	Achar a setima potência de $-m^2n^3$.	?
11.	Achar o cubo de $-3a^4$.	?
12.	Achar a quarta potência de $7a^2x^3$.	?

Elevação de um polinômio a qualquer potência

264. Problema. Qual é o quadrado de $ax+cy$?

Solução. Multiplicando $ax+cy$ por si mesmo, ou seguindo o enunciado do 1.° teorema, obtemos o seu quadrado, como se vê na expressão ao lado.

$$(ax+cy)(ax+cy)=a^2x^2+2acxy+c^2y^2.$$

Regra. *Para se elevar um polinômio a qualquer potência, acha-se o produto dessa quantidade, tomada como fator tantas vezes quantas forem as unidades do expoente da potência requerida.*

1.	Achar o quadrado de $1-x$.	$1-2x+x^2$.
2.	Achar o quadrado de $x+1$.	x^2+2x+1.
3.	Achar o quadrado de $a-cy$.	$a^2-2acy+c^2y^2$.
4.	Achar o quadrado de $2x^2-3y^2$.	$4x^4-12x^2y^2+9y^4$.
5.	Achar o cubo de $a+x$.	$a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$.
6.	Achar o cubo de $x-y$.	$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
7.	Achar o cubo de $2x-1$.	$8x^3-12x^2+6x-1$.
8.	Achar o valor de $(c-x)^4$.	$c^4-4c^3x+6c^2x^2-4cx^3+x^4$.
9.	Achar o quadrado de $a+b+c$.	?
10.	Achar a quarta potência de $b+6$.	?

Elevar uma fração a qualquer potência

265. Problema. Qual é o quadrado de $\frac{a+b}{a-b}$?

Solução. Multiplicando a fração por si mesma, obtemos o seu quadrado.

$$\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a+b}{a-b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

Regra. *Elevam-se os dois termos da fração à potencia requerida.*

1. Achar o quadrado de $\frac{2x}{3y}$. Resp. $\frac{4x^2}{9y^2}$.
2. Achar o quadrado de $\frac{ac^2}{x^2y}$. » $\frac{a^2c^4}{x^4y^2}$.
3. Achar o cubo de $-\frac{2a}{x^2y^3}$. » $-\frac{8a^3}{x^6y^9}$.
4. Achar o quadrado de $\frac{2x^2}{3y}$. » $\frac{4x^4}{9y^2}$.
5. Achar o quadrado de $\frac{x-2}{x+3}$. » $\frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}$.

BINÔMIO DE NEWTON

266. Todos os binômios podem ser elevados a qualquer potência por meio de multiplicações sucessivas, mas êste processo, além de ser muito moroso, está sujeito a muitos erros. O grande matemático inglês Isaac Newton descobriu um processo facílimo de elevar um binômio a qualquer potência sem êsse trabalho fastidioso, nem o perigo de errar. A êsse processo admirável deu-se o nome de **Binômio de Newton.**

Para compreendermos a base em que assentam as leis desta fórmula importante, elevemos os binômios $(a+b)$ e $(a-b)$ até a quinta potência, suprimindo as diversas multiplicações para não tomarem aqui muito espaço:

2ª Potência. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
3ª Potência. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
4ª Potência. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
5ª Potência. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.
2ª Potência. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3ª Potência. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
4ª Potência. $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
5ª Potência. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.

267. Nas diversas potências dêstes dois binômios, temos de analisar quatro pontos, que são:

1.° O número de termos.
2.° Os sinais dos termos.
3.° Os expoentes dos termos.
4.° Os coeficientes dos termos.

Número de termos

268. Examinando o número de termos de cada potência dos dois binômios, vemos que a segunda potência tem três termos; a terceira potência tem quatro termos, a quarta potência tem cinco, a quinta potência tem seis; daquí inferimos que o *número dos termos de qualquer potência de um binômio, é 1 mais que o expoente da potência.*

Sinais dos termos

269. Examinando-se os sinais, fica evidente que *quando ambos os termos do binômio são positivos, todos os termos das potências são positivos.*

Quando o primeiro termo é positivo e o segundo negativo, todos os termos **de ordem ímpar** *são positivos e os* **de ordem par** *são negativos.*

Nota. Termos de ordem ímpar são o 1.°, 3.°, 5.°, etc.; e termos de ordem par são o 2.°, 4.°, 6.°, etc., começando pela esquerda.

Expoentes dos termos

270. Se omitirmos os coeficientes da quinta potência de $a-b$ e $a+b$, a parte literal será

$(a+b)^5$.................. $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.
$(a-b)^5$.................. $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$.

Examinando estas e outras potências de $a+b$ e $a-b$, vemos que os expoentes das letras são regidos pelas seguintes leis:

1.° O expoente da letra no primeiro termo é o mesmo que o da potência do binômio; e o expoente desta letra nos outros termos vai diminuindo 1 da esquerda para a direita, até o último termo que já não tem mais esta letra.

2.° O expoente da segunda letra é 1 no segundo termo da potência, e os outros expoentes desta letra vão crescendo 1 da esquerda para a direita, até o último termo, no qual o expoente é o mesmo que o da potência do binômio.

3.° O polinômio resultante é homogêneo e do mesmo grau da potência do binômio.

Nota. O discípulo poderá agora empregar estes princípios escrevendo as diferentes potências dos binômios, omitindo os coeficientes, como se vê nos exemplos seguintes:

$(x+y)^3$ .... $x^3+x^2y+xy^2+y^3.$
$(x-y)^4$ .... $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$
$(x+y)^5$ .... $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5.$
$(x-y)^5$?
$(x+y)^6$?
$(x-y)^7$?
$(x+y)^7$?

Coeficientes dos termos

271. Examinando os coeficientes das diversas potências de $a+b$ e $a-b$, vemos que

O coeficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendido e o coeficiente do segundo termo é o mesmo que o expoente da potência do binômio.

A lei que rege os coeficientes dos termos seguintes pode ser assim expressa:

Se o coeficiente de qualquer termo fôr multiplicado pelo expoente da primeira letra, e o produto dividido pelo número da ordem dêsse termo, o quociente será o coeficiente do termo seguinte.

Para esta lei ficar bem compreendida, vamos ilustrá-la escrevendo a sexta potência de $a+b$, pondo sôbre cada termo o respectivo coeficiente, e debaixo o número de sua ordem para facilitar a explicação e o cálculo.

1		6		15		20		15		6		1
a^6	+	a^5b	+	a^4b^2	+	a^3b^3	+	a^2b^4	+	ab^5	+	$b^6.$
1.°,		2.°,		3.°,		4.°,		5.°,		6.°,		7.°.

Devemos notar que, em uma potência ordenada, cada termo tem a sua ordem ou lugar. Assim, o primeiro termo da esquerda é o termo da 1.ª ordem; o segundo termo é da 2.ª ordem; o terceiro é da 3.ª ordem, e assim por diante; de modo que os números 1.°, 2.°, 3.°, etc., mostram a ordem ou o lugar em que o termo está escrito na potência.

O coeficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendido. O coeficiente do segundo termo é o expoente do primeiro termo, que é 6. Nos dados do segundo termo temos de achar o coeficiente do terceiro termo. Então multiplicando o coeficiente que é 6, pelo expoente de a que é 5, e dividindo o produto pelo número de sua ordem que é 2, temos $\frac{6\times5}{2}=15$, que é o coeficiente do terceiro termo. Nos dados do terceiro termo temos de achar o coeficiente do quarto termo: multiplicando o coeficiente 15 pelo expoente de a que é 4, dividindo o produto pelo número de sua ordem que é 3, temos $\frac{15\times4}{3}=20$, que é o coeficiente do quarto termo.

Prosseguindo assim, vemos que os coeficientes de todos os termos são:

	1,	6,	$\frac{6\times5}{2}$,	$\frac{15\times4}{3}$,	$\frac{20\times3}{4}$,	$\frac{15\times2}{5}$,	$\frac{6\times1}{6}$.
ou	1,	6,	15,	20,	15,	6,	1.

Estes coeficientes juntos aos respectivos termos dão:

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

272. Segundo a lei que acabámos de ilustrar, vemos que os coeficientes

de $(a+b)^2$ são 1, 2, 1.
de $(a+b)^3$ são 1, 3, 3, 1.
de $(a+b)^4$ são 1, 4, 6, 4, 1.
de $(a+b)^5$ são 1, 5, 10, 10, 5, 1.
de $(a+b)^6$ são 1, 6, 15, 20, 15 6, 1.

Devemos notar aquí que os coeficientes crescem até ao meio da potência, e depois decrescem na mesma razão; por isso basta sòmente calcular os coeficientes até ao meio mais 1 da potência ou até o meio da potência mais 1, e depois repetir os mesmos números em ordem inversa. Assim, si a potência for par, 6 por exemplo, devemos calcular até o 4.° $(\frac{6}{2}+1)$ termo; si a potência fôr impar, 11 por exemplo, basta-nos calcular 6 termos $\frac{11+1}{2}$.

273. Qualquer potência de 1 é sempre 1; assim, $1\times1=1$, $1\times1\times1=1$. Quando 1 é fator, não influe sôbre a quantidade por que se multiplica, assim, $1\times x=x$, $ab\times1=ab$.

Resolver os seguintes exercícios por meio de Binômio de Newton:

1. Elevar $x+y$ à terceira potência.	Resp.	?
2. Elevar $x-y$ à quarta potência.	»	?
3. Elevar $m+n$ à quinta potência.	»	?
4. Elevar $x-z$ à sexta potência.	»	?
5. Qual é a sétima potência de $a+b$?	»	?
6. Achar a terceira potência de $x+1$.	»	?
7. Qual é a quarta potência de $b-1$.	»	?
8. Elevar $1-a$ à quinta potência.	»	?

274. Quando os termos de um binômio teem coeficientes e expoentes, abrevia-se a potenciação, operando-se com um binômio simples, e depois substituindo-se os seus diversos termos pelos valores correspondentes do binômio dado.

Exemplo. Qual é a terceira potência de $2x-ac^2$?

Solução. Se substituirmos $2x$ por m, e ac^2 por n teremos $(2x-ac^2)=(m-n)$, binômio simples. Então $(m-n)^3=m^3-3m^2n+3mn^2-n^3$. Precisamos agora compreender que

sendo $m=2x$,	sendo $n=ac^2$,
então $m^2=4x^2$,	então $n^2=a^2c^4$,
e $m^3=8x^3$;	e $n^3=a^3c^6$.

Se substituirmos agora as diversas potências de m e n por seus respectivos valores nas potências $2x$ e ac^2, teremos:

1.° Termo $m^3=$............. $8x^3$
2.° Termo $3m^2n=3(4x^2\times ac^2)=12ac^2x^2$
3.° Termo $3mn^2=3(2x\times a^2c^4)=6a^2c^4x$
4.° Termo $n^3=$............. a^3c^6.

Ordenando os termos desta terceira potência, temos:

$$(2x-ac^2)^3=8x^3-12ac^2x^2+6a^2c^4x-a^3c^6$$

Resolva deste modo os seguintes exemplos:

1. Qual é a terceira potência de $3a^2-5b$?
   Resp. $27a^6-135a^4b+225a^2b^2-125b^3$.
2. Qual é a terceira potência de $2ax+by$?
   Resp. $8a^3x^3+12a^2x^2by+6axb^2y^2+b^3y^3$.
3. Qual é a quinta potência de x^2+3y^2?
   Resp. $x^{10}+15x^8y^2+90x^6y^4+270x^4y^6+405x^2y^8+243y^{10}$.

275. Quando um dos termos do binômio é uma fração, podemos de dois modos achar o quadrado do binômio: multiplicando a fração ou transformando o binômio em uma fração imprópria.

(1.° Modo)	(2.° Modo)
$x+\frac{1}{2}$	$x+\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{2}$
$x+\frac{1}{2}$	$\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2=\frac{4x^2+4x+1}{4}$
$x^2+\frac{1}{2}x$	ou $x^2+x+\frac{1}{4}$.
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	
$x^2+x+\frac{1}{4}$.	

Solução. Multiplicando-se o binômio por si mesmo, o quadrado é $x^2+x+\frac{1}{4}$. Reduzindo o binômio a uma fração imprópria, e quadrando a fração achamos o mesmo resultado.

Outros modos de formar um quadrado

276. Como já vimos anteriormente o modo direto e simples de achar o quadrado de um número é multiplicar êsse número por si; assim o quadrado de 12 é $12\times12=144$. Há, porém, outros modos de formar o quadrado de um número, os quais precisamos também conhecer.

277. O quadrado de um número superior a 10 pode ser formado pela agregação das diversas partes de que é formado. O número 11 pode ser decomposto em duas quantidades que são $10+1$; o número 12, em $10+2$; o número 13, em $10+3$, e assim por diante.

Ora como «*o quadrado da soma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais duas vezes o produto da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda*» **secção 93**, segue-se que se decompusermos o número 12 em $10+2$, e agregarmos as diversas partes mencionadas no teorema acima, teremos o quadrado de 12. Verifiquemos êste caso:

Quadrado da primeira quantidade	10×10	$=100$
Duas vezes o produto da primeira quantidade multiplicada pela segunda	$2(10\times2)$	$=40$
Quadrado da segunda quantidade	2×2	$=4$
Prova.......	12×12	$=144$

Se o número for composto de três algarismos, como por exemplo 125, poderemos decompô-lo em 120+5, e depois formar o seu quadrado do mesmo modo.

Exemplo:

Quadrado da primeira quantidade	120×120=14400
Duas vezes o produto da primeira quantidade multiplicada pela segunda	2(120×5) = 1200
Quadrado da segunda quantidade	5×5 = 25
Prova........	125×125=15625

278. Podemos também achar o quadrado de um número por meio do quadrado de um número inferior.

A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dôbro do menor mais uma unidade. Assim 8 e 9 são números consecutivos; os seus quadrados são 8×8=64 e 9×9=81; a diferença entre estes quadrados é 81—64=17. Ora, 17 é igual ao dôbro de 8, que é o número menor, e mais uma unidade ou 1.

Demonstração algébrica. Seja a o número menor, e $(a+1)$ o número maior. Quadrando estas duas quantidades e subtraindo a menor da maior, teremos $2a+1$, isto e, o *dôbro da quantidade menor mais* 1.

$$(a+1)^2=a^2+2a+1$$
$$a^2=a^2$$
$$\overline{\qquad 2a+1}$$

Com o quadrado de um número qualquer podemos, pois, formar os quadrados dos números seguintes sòmente por meio de simples adições.

Problema. Sendo 625 o quadrado de 25, qual é o quadrado de 26 e de 27?

Solução. Sendo 625 o quadrado de 25, o quadrado de 26 é 625 mais 50, que é o dobro de 25, e mais 1, isto é, 676. O quadrado de 27 é 676, mais 52 que é o dobro de 26, e mais 1, isto é, 676+52+1=729; e assim por diante.

$$\begin{array}{r} 625 \\ 50 \\ 1 \\ \hline 676 \end{array}$$

279. Daqui deduzimos o seguinte corolário:

Se juntarmos a um quadrado perfeito o dôbro da sua raiz e mais 1, obteremos o quadrado perfeito imediato superior.

Podemos portanto formar fàcilmente uma tabela de quadrados perfeitos, adicionando a cada quadrado o dôbro da sua raiz e mais 1. Assim,

100.............. é o quadrado de 10;
100+10+10+1=121 é o quadrado de 11;
121+11+11+1=144 é o quadrado de 12;
144+12+12+1=169 é o quadrado de 13;
169+13+13+1=196 é o quadrado de 14;
196+14+14+1=225 é o quadrado de 15; etc.

EXTRAÇÃO DA RAIZ QUADRADA

280. A raiz quadrada de uma quantidade é a quantidade que elevada ao quadrado reproduz a quantidade dada. Assim a raiz quadrada de 25 é 5, porque 5×5=25; a raiz quadrada de x^2 é x, porque $x \times x = x^2$.

281. A raiz cúbica de uma quantidade é outra quantidade que elevada ao cubo reproduz a quantidade dada. Assim a raiz cúbica de 27 é 3, porque 3×3×3=27; a raiz cúbica de x^3 é x porque $x \times x \times x = x^3$.

Nota. As palavras potências e raízes são termos correlativos. Se uma quantidade é uma potência de outra, a última é raiz da primeira. Assim, a^3 é o cubo de a, e a é a raiz cúbica de a^3.

282. Extrair a raiz m de um número é procurar o número que elevado à potência m reproduz o número dado.

Extrair a raiz quadrada de uma quantidade é achar o fator que, multiplicado por si, dê essa quantidade.

Nota. De três modos podemos decompôr uma quantidade, a saber: pela subtração, pela divisão e pela extração das raízes.

Pela *subtração*, uma quantidade é separada em duas partes que somadas dão essa quantidade.

Pela *divisão*, uma quantidade é decomposta em dois fatores que multiplicados produzem essa quantidade.

Pela *extração das raízes*, uma potência é decomposta em fatores iguais que, multiplicados entre si, produzem essa potência.

283. Em Álgebra, as raízes exprimem-se de dois modos, a saber:

1.° Pelo sinal radical.

2.° Pelo expoente fracionário.

284. Primeiro modo. O sinal radical é a figura $\sqrt{\ }$ que se escreve sôbre uma quantidade, para mostrar que ela deve ser tomada no valor da raiz indicada pelo índice.

285. Indice da raiz é o número escrito no ângulo do sinal radical para mostrar o seu grau. Assim,

$\sqrt[2]{16}=4$ lê-se: A raiz quadrada de 16 é igual a 4.
$\sqrt[3]{x^3}=x$ lê-se: A raiz cúbica de x^3 é igual a x.
$\sqrt[4]{625}=5$ lê-se: A quarta raiz de 625 é igual a 5.

Nestes exemplos, os algarismos 2, 3 e 4 são os índices que mostram os graus das raizes.

286. Segundo modo. Exprime-se também a raiz com um expoente fracionário, dando ao numerador o grau da potência, e ao denominador o grau da raiz. Assim, $a^{\frac{1}{2}}$ mostra que da quantidade a^1 ou a devemos extrair a raiz quadrada. Esta expressão é igual a $\sqrt[2]{a}$. Também $x^{\frac{2}{3}}$ mostra que de x^2 devemos extrair a raiz cúbica. Esta expressão é igual a $\sqrt[3]{x^2}$.

O valor de uma quantidade não ficará alterado, se trocarmos o expoente fracionário por outro de igual valor. Assim, $a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{4}}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{5}{10}}$ etc.

287. Quando um número é composto de dois fatores e iguais, chama-se **quadrado perfeito.** Assim, 9 é quadrado perfeito, porque é composto de 3×3; 16 é quadrado perfeito, porque é composto de 4×4; da mesma forma $\frac{1}{4}$ é quadrado pois é igual a $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

288. Os números que não são quadrados perfeitos, só podem ter uma raiz quadrada aproximada, composta de um número inteiro e uma fração. Assim, a raiz quadrada de 10 é 3,162277.., isto é, 3 inteiros e uma fração decimal que, por mais aproximada que seja, nunca esta raiz, multiplicada por si, produzirá exatamente o número 10.

A raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito só pode ser obtida aproximadamente.

289. Os quadrados dos números inteiros, desde 1 até 100, são os seguintes:

Quadrados perfeitos:	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 100.
Raízes quadradas :	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Nesta tabela vemos que a raiz quadrada de 1 é 1, e que todos os quadrados, desde 1 até 100 exclusive, teem a raiz quadrada com um só algarismo; e por isso concluímos que *todo quadrado que não tiver mais de dois algarismos, a sua raiz quadrada terá um só algarismo.*

290. Quadrando agora as dez primeiras dezenas, temos os seguintes resultados:

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.
100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100, 10000.

Destes resultados vemos que todos os quadrados desde 100 até 1000 exclusive constam de três ou quatro algarismos, e por isso concluímos que todo quadrado que contém mais de dois algarismos e não mais de quatro, terá a raiz quadrada com dois algarismos.

Do mesmo modo se pode também provar que o quadrado que contém mais de quatro algarismos e não mais de seis, terá a raiz quadrada com três algarismos, e assim por diante.

Daqui formulamos o seguinte princípio:

291. *Quando um número contiver um ou dois algarismos, a sua raiz terá um só; quando contiver três ou quatro, a raiz terá dois; quando contiver cinco ou seis, a raiz terá três, e assim por diante.*

Nota. Quando um número não fôr um quadrado perfeito, a sua raiz quadrada terá além do número inteiro uma fração; mas os algarismos da fração não entram nesta contagem.

292. Como já vimos na **secção 277,** qualquer número de mais de um algarismo pode ser decomposto em duas partes ou quantidades, sendo uma as dezenas e a outra as unidades. Assim, o número 23 pode ser decomposto em 2 dezenas e 3 unidades; o número 256 pode ser decomposto em 25 dezenas e 6 unidades. De sorte que se representarmos as dezenas por d, e as unidades por u, qualquer número poderá ser representado por $d+u$, e o seu quadrado por $d^2+2du+u^2$.

Ora, os dois últimos termos ou parcelas dêste quadrado, que são $2du+u^2$ também podem ser expressas dêste modo: $(2d+u)u$, isto é, *duas vezes as dezenas mais as unidades multiplicadas pelas unidades.* Dêste modo, a formula do quadrado pode também ser assim expressa: $(d+u)^2=d^2+(2d+u)u$.

Esta nova formula facilita a extração da raiz quadrada, e pode ser traduzida do seguinte modo:

O quadrado de qualquer número de mais de um algarismo é composto do quadrado das dezenas, mais a quantidade que contém duas vezes as dezenas, mais as unidades multiplicadas pelas unidades.

Assim, o quadrado de 23, que é igual a duas dezenas e 3 unidades, é o seguinte:

Quadrado de duas dezenas = ... $(20)^2=400$
(2 vezes as dezenas + 3 unidades) multiplicadas por 3. $=(40+3)\times 3=129$

Prova. $23\times 23=529$

293. Vamos agora operar no sentido inverso, isto é, extrair a raiz quadrada de 529.

Problema. Qual é a raiz quadrada de 529?

Solução. Como o número dado consta de três algarismos, a sua raiz terá dois (n. **291**).

Desde que o quadrado de 2 dezenas é 400 e o quadrado de 3 dezenas é 900, é evidente que o maior quadrado perfeito contido em 500 é o quadrado de 2 dezenas $(20)^2$; o quadrado de 2 dezenas é 400; subtraindo agora êste quadrado de 529, o resto é 129. Portanto, 2 é o primeiro algarismo da raiz.

```
 5 2 9 | 20+3=23
 4 0 0 |--------
 ----- |
 1 2 9 | (40+3)×3
 1 2 9 |
 ----- |
 0 0 0 |
```

Ora, segundo a fórmula acima, o resto 129 contém duas vezes as dezenas mais as unidades, multiplicadas pelas unidades, isto é, $(2d+u)u$.

Multiplicando-se dezenas pelas unidades, o produto não pode ser infe-
rior às dezenas, e por isso o algarismo 9 não deve fazer parte do dôbro
das dezenas multiplicadas pelas unidades. Então, se dividirmos 120 pelo
dôbro das dezenas (40), o quociente será o algarismo que representa as
unidades. Dividindo, então, 120 por 40, temos o quociente 3, que é o nú-
mero das unidades, e por conseguinte o segundo algarismo da raiz.

Este algarismo junto ao dôbro das dezenas, dá $40+3=43$; multiplicando agora 43 por 3, temos o produto 129, que é o dôbro das dezenas mais as unidades, multiplicadas pelas unidades $(2d+u)u$. Como subtraindo êste produto do resto do quadrado nada resta, segue-se que 23 é a raiz quadrada exata de 529.

Quando se extraí a raiz quadrada, é costume suprimirem-se as cifras no quadrado das dezenas, e operar-se o processo como no modêlo que está ao lado.

```
 5 2 9 | 23
 4     |----
 ----- |
 1 2 9 | 43×3
 1 2 9 |
 ----- |
 0 0 0 |
```


Modo prático de extração

Problema. Qual é a raiz quadrada de 1 8 2 3 2 9 ?

Solução. O número 1 8 2 3 2 9 tem 3 classes, e por isso a sua raiz terá também 3 algarismos.

Começa-se sempre a extração pela primeira classe da esquerda. A raiz quadrada de 18 é 4. Escreve-se 4, como o primeiro algarismo da raiz, e como um divisor à direita do número. Subtrai-se de 18 o quadrado de 4, que é 16; o resto 2, com a classe seguinte, forma o novo dividendo 223.

```
 1 8 2 3 2 9 | 427 Raiz
 1 6         |------------
 -----       |
   2 2 3     | 82×2=164
   1 6 4     |
 ---------   | 847×7=5929
     5 9 2 9 |
     5 9 2 9 |
     ------- |
     0 0 0 0 |
```

Dobra-se o divisor 4, que fica 8, e escreve-se abaixo como um divisor indicante (Chama-se divisor indicante, porque êle indica o algarismo seguinte da raiz).

Para se achar o algarismo seguinte da raiz, separa-se em 223 o último algarismo da direita e divide-se o número resultante pelo divisor indicante, e o quociente será o segundo algarismo da raiz. Nesta divisão despreza-se o resto.

Dividindo-se 22 por 8, o quociente é 2, e por isso o segundo algarismo da raiz é 2. Escreve-se 2 na raiz e também junto com o divisor indicante, que fica 82, e se torna divisor completo. Multiplica-se pelo segundo algarismo da raiz o divisor completo, e o produto 164 se subtrai do dividendo 223; o resto 59, com a classe seguinte, forma o novo dividendo 5929.

Para se achar o último algarismo da raiz, toma-se como novo divisor indicante o dôbro da parte da raiz já achada, isto é, o dôbro de 42 e então fica 84. Divide-se o novo dividendo pelo divisor 84, e o quociente 7 será o último algarismo da raiz. Escreve-se 7 na raiz e também junto com o divisor 84, ficando então 847, divisor completo, e multiplicando-se êste divisor completo pelo último algarismo da raiz, teremos o produto 5929 que se subtrai do dividendo. Esta subtração não deixando resto, 182329 é um quadrado perfeito, e a sua raiz quadrada é 427.

Prova. $427\times 427=182329$.

Regra. *I. Para se extrair a raiz quadrada de um número, divide-se êste número em classes de dois algarismos cada uma, começando pelas unidades.*

II. Acha-se o maior quadrado perfeito contido na última classe, e escreve-se a sua raiz ao lado direito, em forma de divisor, e será êste o primeiro algarismo da raiz. Subtrai-se daquela classe o quadrado dêste algarismo e o resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

III. Dobra-se a parte da raiz achada, e escreve-se como um divisor indicante ao lado do dividendo; acha-se quantas

vezes o divisor é contido no dividendo, excluindo dêste o último algarismo da direita, e êsse número junta-se ao primeiro algarismo da raiz e também ao divisor.

IV. Multiplica-se agora o divisor completo pelo número achado, e o produto subtrai-se do dividendo. O resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

V. Desce-se com o divisor o algarismo dobrado da direita, e continúa-se o processo como acima até todas as classes ficarem divididas.

Nota. Quando um divisor indicante é maior do que o respectivo dividendo, escreve-se uma cifra na raiz, outra no divisor e desce-se outra classe para o dividendo, e continua-se a operação. Se houver resto, depois de se achar a raiz da última classe, o número não é um quadrado perfeito. Obteve-se a raiz inteira, mas esta póde ser aproximada obtendo-se os décimos, centésimos, etc., da raiz. Para isto, juntam-se classes de cifras ao resto, e escreve-se uma vírgula decimal no fim da parte inteira da raiz, para se indicar que os algarismos que seguem são decimais.

Extrair a raiz quadrada dos seguintes números:

1. $\sqrt{4225} = ?$ Resp. 65
2. $\sqrt{1521} = ?$ » 39.
3. $\sqrt{7225} = ?$ » 85.
4. $\sqrt{9409} = ?$ » 97.
5. $\sqrt{1444} = ?$?
6. $\sqrt{3025} = ?$?
7. $\sqrt{6241} = ?$?
8. $\sqrt{49284} = ?$?

Extração da raiz quadrada das frações

294. Desde que o quadrado de uma fração se obtém quadrando separadamente cada um de seus termos, segue-se que, se os dois termos de uma fração forem quadrados perfeitos, *a raiz quadrada da fração se acha extraindo a raiz quadrada de cada um dos seus termos.*

295. Problema. Qual é a raiz quadrada de $\frac{9}{16}$?

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

1. Qual é a raiz quadrada de $\frac{1}{4}$? Resp. $\frac{1}{2}$.
2. Qual é a raiz quadrada de $\frac{25}{36}$? » $\frac{5}{6}$.
3. Qual é a raiz quadrada de $\frac{16}{49}$? » ?
4. Qual é a raiz quadrada de $\frac{64}{81}$? » ?
5. Qual é a raiz quadrada de $\frac{256}{361}$? » ?
6. Qual é a raiz quadrada de $\frac{4096}{61009}$? » ?

Extração da raiz quadrada dos monômios

296. Para acharmos o modo de extrair a raiz quadrada dos monômios, devemos notar como se forma o seu quadrado.

Segundo a regra da elevação de um monômio a qualquer potência (**n. 260**), vemos que

$$(5a^2b^3c)^2 = 5a^2b^3c \times 5a^2b^3c = 25a^4b^6c^2.$$

Para quadrarmos um monômio, temos de quadrar o seu coeficiente numérico, e depois de multiplicar o expoente de cada fator literal por 2. Então, para acharmos a raiz quadrada de um monômio, temos a seguinte regra:

Regra. *Extrai-se a raiz quadrada do coeficiente numérico, e divide-se o expoente de cada fator literal por 2.*

Nota. Esta regra só tem aplicação quando o monômio é um quadrado perfeito. Quando o monômio é quadrado imperfeito, a sua raiz quadrada pode sòmente ser indicada. Assim, a raiz quadrada de $3ab$ é $\sqrt{3ab}$.

297. Sinais da raiz. Se multiplicarmos $+a$ por $+a$, o produto será $+a^2$; se multiplicarmos $-a$ por $-a$, o produto será também $+a^2$. Então a raiz quadrada de $+a^2$ pode ser $+a$ ou $-a$; assim também a raiz quadrada de $25a^4b^6c^2$ pode ser $5a^2b^3c$ ou $-5a^2b^3c$. Daquí concluímos que a raiz quadrada de um monômio positivo, pode ter o sinal + ou —, e esta resposta dupla se exprime com o sinal dobrado ±; assim $\sqrt{9a^2} = \pm 3a$, que se lê: A raiz quadrada de $9a^2$ é igual a mais ou menos $3a$.

298. Se um monômio é negativo, não é possível extrair a sua raiz quadrada, porque o quadrado de qualquer quantidade positiva ou negativa é sempre positivo. De sorte que $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$, $\sqrt{-b}$, são expressões algebricas, que indicam operações impossíveis, e por isso se denominam **quantidades imaginárias.** Quando, pois, encontrarmos expressões desta natureza nas equações do segundo grau, é porque há algum absurdo no problema, ou impossibilidade na equação.

Achar a raiz quadrada de cada um dos seguintes monômios:

1. $\sqrt{4a^2x^2} = ?$ Resp. $\pm 2ax$.
2. $\sqrt{9x^2y^4} = ?$ » $\pm 3xy^2$.
3. $\sqrt{25a^2b^2c^4} = ?$ Resp. $\pm 5abc^2$.
4. $\sqrt{36a^4b^6x^2} = ?$ » $\pm 6a^2b^3x$.

5. $\sqrt{16m^2n^4y^6} = ?$?
6. $\sqrt{49a^2b^4c^2} = ?$?
7. $\sqrt{625x^2z^4} = ?$?
8. $\sqrt{1156a^2x^4z^6} = ?$?

299. Desde que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, segue-se que $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \pm \frac{a}{b}$, isto é, *para se achar a raiz quadrada de uma fração monômia, extrai-se a raiz quadrada de ambos os seus termos.*

9. Achar a raiz quadrada de $\frac{4a^2}{9b^4}$. Resp. $\pm \frac{2a}{3b}$.
10. Achar a raiz quadrada de $\frac{16x^2y^4}{25a^2z^2}$. » ?

Extração da raiz quadrada dos polinômios

300. Antes de formular a regra para a extração da raiz quadrada dos polinômios, examinemos a relação que há entre um polinômio e o seu quadrado.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$
$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$
$$(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Daquí vemos que o quadrado de qualquer polinômio é formado pela seguinte lei:

301. *O quadrado de qualquer polinômio é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo multiplicado pelo segundo; mais o quadrado do segundo, mais duas vezes os dois primeiros termos multiplicados pelo terceiro; mais o quadrado do terceiro, mais duas vezes os três primeiros termos multiplicados pelo quarto; e assim por diante.*

I Problema. Qual é a raiz quadrada de $a^2+2ab+b^2$?

Solução. Como os termos deste polinômio se acham já ordenados com relação à letra a, acharemos a raiz quadrada do 1.º termo, que é a^2. Ora, a raiz quadrada de a^2 é a, que se escreve à direita como o primeiro termo da raiz. Subtraindo agora do 1.º termo o quadrado desta raiz, nada resta.

Desce-se o resto do polinômio ($2ab+b^2$) para se operar. Dividindo-se então o termo dêste resto pelo dôbro da raiz achada, que é $2a$, temos o quociente b, que é o segundo termo da raiz. Multiplicando agora $2a+b$ por b, obtemos $2ab+b^2$ que, subtraido do resto $2ab+b^2$, não deixa resto. Então, $a+b$ é a raiz quadrada de $a^2+2ab+b^2$.

Operação.

	Raiz
$a^2+2ab+b^2$	$a+b$
a^2	
$0 + 2ab + b^2$	$(2a+b) \times b.$
$2ab+b^2$	
$0 \quad 0$	

II Problema. Qual é a raiz quadrada de $4a^4-12a^3+5a^2+6a+1$?

Operação.

$4a^4-12a^3+5a^2+6a+1$	$2a^2-3a-1$ Raiz
$4a^4$	
$0-12a^3+5a^2+6a+1$	$(4a^2-3a) \times (-3a)$
$-12a^3+9a^2$	
$0-4a^2+6a+1$	$(4a^2-6a-1) \times (-1)$
$0 \quad 0 \quad 0$	

Solução. A raiz quadrada do 1.º termo do polinômio é $2a^2$, que será o 1.º termo da raiz. Subtraindo do 1.º termo ($4a^4$) o quadrado da raiz achada ($2a^2 \times 2a^2 = 4a^4$), nada restará.

O resto do polinômio ($-12a^3+5a^2+6a+1$) desce-se para ser operado. Dividindo êste resto pelo dôbro do 1.º termo da raiz ($2 \times 2a^2 = 4a^2$), o quociente $-3a$ será o segundo termo da raiz, e se escreverá adiante de $4a^2$ para formar um novo divisor. Multiplicando-se agora $4a^2-3a$ por $-3a$, e o produto sendo subtraído de $-12a^3+5a^2+6a+1$, restará $-4a^2+6a+1$.

Divide-se êste resto pelo dôbro dos dois termos da raiz, e o quociente -1 será o terceiro termo da raiz.

Junta-se êste termo ao dôbro dos dois primeiros termos, e tem-se $4a^2-6a-1$; multiplica-se esta quantidade pelo terceiro termo da raiz (-1) e subtrai-se o produto de $-4a^2+6a+1$. Não havendo resto a raiz quadrada é $2a^2-3a-1$.

Regra. *I. Ordena-se o polinômio em relação às potências decrescentes de uma letra; então acha-se o primeiro termo da raiz, extraindo a raiz quadrada do primeiro termo do polinômio, e escreve-se o resultado à direita, e subtrai-se o seu quadrado do polinômio dado.*

II. Divide-se o primeiro termo do resto pelo dôbro da parte da raiz já achada, e o resultado que é o segundo termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim completo pelo segundo termo da raiz, e o produto subtrai-se do resto.

III. Dobram-se os termos da raiz já achados, para formar um divisor indicante; divide-se o primeiro termo do resto pelo primeiro termo do divisor, e o resultado, que é o terceiro termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divi-

sor assim completo pelo terceiro termo da raiz, e o produto subtrai-se do último resto. E assim se procede até passar por todos os termos do polinômio.

Achar a raiz quadrada dos seguintes polinômios:

1. x^2+4x+4. Resp. $x+2$.
2. $4x^2-12x+9$. » $2x-3$.
3. $x^2y^2-8xy+16$. » $xy-4$.
4. $4a^2x^2-20axyz+25y^2z^2$. » $2ax-5yz$.
5. $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$. » ?
6. $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$. » ?

302. Nenhum binômio pode ser quadrado perfeito, porque o quadrado de um monômio é um monômio, e o quadrado de um binômio é um trinômio. Assim, a^2+b^2 não é quadrado perfeito; mas se lhe adicionarmos $2ab$, tornar-se-á o quadrado de $a+b$, e se dêle subtrairmos $2ab$, tornar-se-á o quadrado de $a-b$.

303. Para que um trinômio seja quadrado perfeito, é necessário que os dois termos extremos sejam quadrados perfeitos, e que o termo do meio seja o dôbro do produto das raizes quadradas dos termos extremos. De sorte que, para se achar a raiz quadrada de um trinômio que é um quadrado perfeito, *extraem-se as raizes quadradas do primeiro termo e do terceiro, e unem-se com o sinal do termo do meio.*

Assim, $4a^2-12ac+9c^2$ é um quadrado perfeito, porque $\sqrt{4a^2}=2a$, $\sqrt{9c^2}=\pm 3c$, e $2\times 2a\times(-3c)=-12ac$. Mas $9x^2+$ $+12xy+16y^2$ não é quadrado perfeito, porque, embora $\sqrt{9x^2}=$ $=3x$, e $\sqrt{16y^2}=4y$, $2(3x\times 4y)$ não é igual a $12xy$.

1. Qual é a raiz quadrada de a^2-2a+1? Resp. $a-1$.
2. Qual é a raiz quadrada de $1+2x+x^2$? » $1+x$.
3. Qual é a raiz quadrada de $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$? » $x+\frac{2}{3}$.
4. Qual é a raiz quadrada de $a^2-a+\frac{1}{4}$? » $a-\frac{1}{2}$.

Radicais do segundo grau

304. Já vimos que, para um monômio ser um quadrado perfeito, é necessário que o seu coeficiente numérico seja um quadrado perfeito. e que o expoente de cada letra seja

exatamente divisível por 2. Assim $4a^2$ é um quadrado perfeito, enquanto que $5a^3$ não é quadrado perfeito. porque o coeficiente 5 não é quadrado perfeito, e o expoente 3 não é divisível por 2.

305. Em Álgebra, si uma expressão não contém radicais ou só contém números submetidos aos radicais, a expressão se diz *racional;* si contiver, porém, letras submetidas a radicais, diz-se *irracional* do 2.º, 3.º 4.º, etc. graus conforme o indice do radical é 2, 3, 4, etc.

Assim $ab\sqrt{2}$ é racional, mas $2a\sqrt[3]{b}$ é uma expressão irracional.

306. O coeficiente do radical é o número ou a letra que está antes do sinal radical. Assim, nas expressões $5\sqrt{3}$ e $a\sqrt{b}$ as quantidades 5 e a são os coeficientes; 5 mostra que o radical $\sqrt{3}$ deve ser tomado 5 vezes, e a mostra que o radical $\sqrt{b}$ deve ser tomado a vezes.

307. Dois radicais são semelhantes quando têm o mesmo indice e a mesma quantidade debaixo do sinal radical. Assim, $3\sqrt{2}$ e $7\sqrt{2}$ são radicais semelhantes; assim também $b\sqrt[3]{a}$, $2\sqrt[3]{a}$ e $2b\sqrt[3]{a}$ são radicais semelhantes.

Redução de um radical à sua forma mais simples

308. Os radicais do segundo grau podem ser simplificados, isto é, reduzidos a uma forma simples, mas com o mesmo valor, quando debaixo do radical houver fatores que sejam quadrados.

Esta redução é baseada no seguinte princípio:

A raiz quadrada do produto de dois ou mais fatores é igual ao produto das raizes quadradas destes fatores.

Assim, $\sqrt{144}=\sqrt{9\times 16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times 4=12$.
Também, $\sqrt{a^2x}=\sqrt{a^2\times x}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{x}=a\sqrt{x}$.

Problema. Reduzir $\sqrt{4a}$ à sua forma mais simples.

Solução. $\sqrt{4a}=\sqrt{4\times a}=\sqrt{4}\times\sqrt{a}=2\sqrt{a}$.

Regra. *Decompõe-se a quantidade submetida ao radical em seus fatores. Extrai-se a raiz quadrada dos fatores*

que forem quadrados, e a raiz prefixa-se como coeficiente do radical debaixo do qual fica o produto dos fatores não quadrados.

Nota. Um radical fica reduzido à sua forma mais simples, quando não tem debaixo do sinal radical nenhum fator que seja quadrado perfeito.

Para se conhecer se uma quantidade contém um fator numérico que seja quadrado perfeito, vê-se se ela é divisível por qualquer um dos quadrados perfeitos, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, etc. Se não fôr divisível por nenhum dêles, não conterá nenhum fator que seja quadrado perfeito, e esta quantidade não poderá ser reduzida.

Reduzir cada um dos seguintes radicais à sua fórma mais simples:

1.	$\sqrt{8a^2}$.	Resp.	$2a\sqrt{2}$.	6.	$\sqrt{32a^6b^2c^4}$.	Resp.	?
2.	$\sqrt{12a^3}$.	»	$2a\sqrt{3a}$.	7.	$\sqrt{40a^2b^3c^5}$.	»	?
3.	$\sqrt{16a^3b}$.	»	$4a\sqrt{ab}$.	8.	$\sqrt{44a^5b^3c}$.	»	?
4.	$\sqrt{18a^4b^3c^3}$.	»	$3a^2bc\sqrt{2bc}$.	9.	$\sqrt{45a^4b^2c^4}$.	»	?
5.	$\sqrt{20a^3b^3c^3}$.	»	$2abc\sqrt{5abc}$.	10.	$\sqrt{75a^3b^2c^3}$.	»	?

309. A raiz quadrada de uma fração pode também ser reduzida a uma forma mais simples.

Multiplicam-se os dois termos por uma quantidade que torne o denominador quadrado perfeito; decompõe-se a fração em dois fatores, dos quais um seja quadrado perfeito; extrai-se a raiz quadrada deste fator, e prefixa-se ao outro fator que fica debaixo do sinal radical.

Problema. Reduzir $\sqrt{\frac{2}{3}}$ à sua forma mais simples.

Solução. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}\times 6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Reduzir os seguintes radicais à sua forma mais simples:

11.	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	Resp.	$\frac{1}{5}\sqrt{15}$.	14.	$\sqrt{\frac{16}{27}}$	Resp.	?
12.	$\sqrt{\frac{7}{8}}$	»	$\frac{1}{4}\sqrt{14}$.	15.	$\sqrt{\frac{11}{18}}$	»	?
13.	$\sqrt{\frac{12}{25}}$	»	$\frac{2}{5}\sqrt{3}$.	16.	$\sqrt{\frac{9}{10}}$	»	?

310. Desde que $a = \sqrt{a^2}$, e $2\sqrt{3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{12}$, é evidente que qualquer quantidade pode ser transformada em um radical do segundo grau, sendo elevada ao quadrado e posta debaixo do sinal radical. Pelo mesmo princípio, o coeficiente de um radical pode passar para debaixo do sinal radical.

17. Transformar 5 em um radical do 2.° grau.

Solução. $5 = \sqrt{5\times 5} = \sqrt{25}$.

18. Transformar $2a$ em um radical do 2.° grau. Resp. $\sqrt{4a^2}$.

19. Passar o fator 3 na quantidade $3\sqrt{5}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{45}$.

20. Passar o coeficiente de $3c\sqrt{2c}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{18c^3}$.

21. Passar o coeficiente de $5\sqrt{3}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{75}$.

22. Passar o coeficiente de $4\sqrt{\frac{1}{8}}$ para debaixo do radical. Resp. $\sqrt{2}$.

Adição dos radicais do segundo grau

311. I Problema. Qual é a soma de $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$?

Solução. E' evidente que 3 vezes mais 5 vezes qualquer quantidade devem fazer 8 vezes essa quantidade. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

II Problema. Qual é a soma de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$?

$$\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{2}+\sqrt{4\times 2} = \sqrt{2}+2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Solução. Reduzindo o segundo radical à sua forma mais simples, e adicionando-o com o primeiro, temos $\sqrt{2}$ ou $1\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Se os radicais depois de simplificados aparecerem dessemelhantes, neste caso, só poderemos somar estas quantidades, pondo o sinal de adição entre êles. Assim, a soma de $2\sqrt{3}$ e $5\sqrt{7}$ é $2\sqrt{3}+5\sqrt{7}$.

Regra. *Reduz-se cada radical à sua forma mais simples, e, se os radicais resultantes forem semelhantes, somam-se os coeficientes, e a soma prefixa-se ao radical comum; mas, se forem dessemelhantes, juntam-se com o sinal da adição.*

Achar a soma dos seguintes grupos de radicais:

1.	$\sqrt{8}$ e $\sqrt{18}$.	Resp.	$5\sqrt{2}$.
2.	$\sqrt{12}$ e $\sqrt{27}$.	„	$5\sqrt{3}$.
3.	$\sqrt{20}$ e $\sqrt{80}$.	„	$6\sqrt{5}$.
4.	$\sqrt{24}$ e $\sqrt{150}$.	„	$7\sqrt{6}$.

5. $\sqrt{75}$ e $\sqrt{147}$. Resp. $12\sqrt{3}$.
6. $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$ e $\sqrt{50}$. „ $11\sqrt{2}$.
7. $\sqrt{40}$, $\sqrt{90}$ e $\sqrt{250}$. „ $10\sqrt{10}$.
8. $\sqrt{28x}$ e $\sqrt{63x}$. „ $5\sqrt{7x}$.
9. $\sqrt{3ab}$ e $6\sqrt{3ab}$ „ $7\sqrt{3ab}$.
10. $\sqrt{75a^2c}$ e $\sqrt{147a^2c}$ „ $12a\sqrt{3c}$.

Subtração dos radicais do segundo grau

312. I Problema. Subtraindo $3\sqrt{2}$ de $5\sqrt{2}$, quanto resta?

Solução. E' evidente que 5 vezes uma quantidade menos 3 vezes essa quantidade, é igual a 2 vezes a mesma quantidade. $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

II Problema. Qual é a diferença entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{2}$?

$$\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{4\times2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Solução. Reduzindo o radical maior a sua forma mais simples, e operando a subtração, vemos que a diferença é $\sqrt{2}$.

Se os radicais são dessemelhantes, é claro que a sua diferença pode só ser indicada. Assim, subraindo $3\sqrt{a}$ de $5\sqrt{b}$ o resultado é $5\sqrt{b}-3\sqrt{a}$.

Regra. *Reduzem-se os radicais à sua forma mais simples, e a diferença entre o coeficiente do minuendo e o do subtraendo prefixa-se ao radical comum.*

Se os radicais não forem semelhantes, indica-se a sua diferença com o sinal de subtração.

Exemplos para resolver:

1. $\sqrt{18}-\sqrt{2}$. Resp. $2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{45a^2}-\sqrt{5a^2}$. „ $2a\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{54b}-\sqrt{6b}$. „ $2\sqrt{6b}$.
4. $\sqrt{112a^2c^2}-\sqrt{28a^2c^2}$. „ $2ac\sqrt{7}$.
5. $\sqrt{27b^3c^3}-\sqrt{12b^3c^3}$. „ $bc\sqrt{3bc}$.
6. $5a\sqrt{27}-3a\sqrt{48}$. „ $3a\sqrt{3}$.
7. $2\sqrt{\frac{3}{4}}-3\sqrt{\frac{1}{3}}$. „ 0.
8. $\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{\frac{10}{27}}$. „ $\frac{1}{18}\sqrt{30}$.

Multiplicação dos radicais do segundo grau

313. I Problema. Qual é o produto de $\sqrt{a}$ multiplicado por $\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ segue-se que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

II Problema. Multiplicar $a\sqrt{b}$ por $c\sqrt{d}$.

Solução. $a\sqrt{b}\times c\sqrt{d}=a\times c\times\sqrt{b}\times\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$.

Regra. *Multiplicam-se entre si as quantidades que estão debaixo do radical, e o produto escreve-se debaixo do radical.*

Se houver coeficientes, multiplicam-se entre si, e o resultado escreve-se como coeficiente do radical, e reduz-se esta expressão à sua forma mais simples.

Exemplos para resolver:

1. Multiplicar $\sqrt{6}$ por $\sqrt{8}$.

Solução. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}$.

2. Multiplicar $2\sqrt{14}$ por $3\sqrt{2}$.

Solução. $2\sqrt{14}\times3\sqrt{2}=2\times3\sqrt{14\times2}=6\sqrt{28}=6\sqrt{4\times7}=$
$=6\times2\sqrt{7}=12\sqrt{7}$.

3. Multiplicar $\sqrt{8}$ por $\sqrt{2}$. Resp. 4.
4. Multiplicar $2\sqrt{a}$ por $3\sqrt{a}$. „ $6a$.
5. Multiplicar $\sqrt{27}$ por $\sqrt{3}$. „ 9.
6. Multiplicar $3\sqrt{2}$ por $2\sqrt{3}$. „ $6\sqrt{6}$.
7. Multiplicar $3\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$. „ 18.
8. Multiplicar $\sqrt{6}$ por $\sqrt{15}$. „ $3\sqrt{10}$.
9. Multiplicar $2\sqrt{15}$ por $3\sqrt{35}$. „ $30\sqrt{21}$.
10. Multiplicar $\sqrt{a^3b^5c}$ por $\sqrt{abc}$. „ a^2b^3c.
11. Multiplicar $2\sqrt{3ab}$ por $3\sqrt{2ab}$. „ $6ab\sqrt{6}$.
12. Multiplicar $\sqrt{\frac{1}{3}}$ por $\sqrt{\frac{3}{4}}$. „ $\frac{1}{2}$.

314. Quando dois polinômios têm radicais do segundo grau, multiplicam-se do mesmo modo que os outros polinômios, observando só a direção contida na regra precedente, como se vê na operação ao lado. A resposta é $6 - \sqrt{5} - 5$, que, reduzida, dá $1 - \sqrt{5}$.

$$\begin{array}{r} 3+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \\ \hline 6+2\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5}-5 \\ \hline 6-\sqrt{5}-5 \end{array}$$

13. Multiplicar $2+\sqrt{2}$ por $2-\sqrt{2}$. Resp. 2.
14. Multiplicar $3+2\sqrt{2}$ por $5-3\sqrt{2}$. „ $3+\sqrt{2}$.
15. Multiplicar $\sqrt{x+2}$ por $\sqrt{x-2}$. „ $\sqrt{x^2-4}$.
16. Multiplicar $\sqrt{y+2}$ por $\sqrt{y+3}$. „ $\sqrt{y^2+5y+6}$.

Divisão dos radicais do segundo grau

315. I Problema. Qual é o quociente de $\sqrt{ab}$ por $\sqrt{a}$.

Solução. Desde que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Segue-se que $\sqrt{ab} \div \sqrt{a} = \sqrt{\frac{ab}{a}} = \sqrt{b}$.

II Problema. Qual é o quociente de $ac\sqrt{bd}$ por $a\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, segue-se que $ac\sqrt{bd} \div a\sqrt{b} = \frac{ac\sqrt{bd}}{a\sqrt{b}} = \frac{ac}{a}\sqrt{\frac{bd}{b}} = c\sqrt{d}$.

Regra. *Dividem-se as quantidades que estão debaixo do radical, e o quociente escreve-se debaixo de radical.*

Se houver coeficientes, dividem-se, e o quociente prefixa-se ao quociente que está debaixo do radical.

Exemplos para resolver:

1. Dividir $8\sqrt{72}$ por $2\sqrt{6}$.

Solução. $\frac{8\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} = \frac{8}{2}\sqrt{\frac{72}{6}} = 4\sqrt{12} = 4\sqrt{4\times 3} = 8\sqrt{3}$.

2. Dividir $\sqrt{54}$ por $\sqrt{6}$. Resp. 3.
3. Dividir $6\sqrt{54}$ por $3\sqrt{27}$. „ $2\sqrt{2}$.
4. Dividir $6\sqrt{28}$ por $2\sqrt{7}$. „ 6.
5. Dividir $\sqrt{160}$ por $\sqrt{8}$. „ $2\sqrt{5}$.
6. Dividir $\sqrt{a^3}$ por $\sqrt{a}$. „ a.

7. Dividir $ab\sqrt{a^3b^3}$ por $b\sqrt{ab}$. Resp. a^2b.
8. Dividir $\sqrt{\frac{1}{2}}$ por $\sqrt{\frac{1}{3}}$. „ $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

316. Uma fração, cujo denominador é monômio ou binômio que contém radicais do segundo grau, pode ser reduzida a uma fração equivalente com um denominador racional.

Ilustração. Quando uma fração tem a forma $\frac{a}{\sqrt{b}}$, multiplicando-se ambos os termos por $\sqrt{b}$, o denominador se tornará racional. Assim,

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Desde que a soma de duas quantidades multiplicadas por sua diferença é igual à diferença de seus quadrados (n.º 96); segue-se que se a fração tiver a forma de $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, e nós multiplicarmos ambos os termos por $b-\sqrt{c}$, o denominador se tornará racional, porque será b^2-c. Assim,

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{ab-a\sqrt{c}}{b^2-c}.$$

Pela mesma razão, se o denominador fôr $b-\sqrt{c}$, o multiplicador será $b+\sqrt{c}$, se o denominador fôr $\sqrt{b}+\sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b}-\sqrt{c}$; e se o denominador fôr $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Regra. *Se o denominador fôr um monômio, multiplicam-se ambos os termos da fração pelo fator irracional do denominador; mas, se fôr um binômio, multiplicam-se ambos os termos pelo binômio dado no denominador com o segundo sinal trocado, e o denominador se tornará racional.*

Reduzir as seguintes frações a outras equivalentes com denominadores racionais:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ „ $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
3. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ Resp. $2-\sqrt{3}$.
4. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ „ $5+2\sqrt{6}$.

Resolução das equações que conteem radicais

317. Quando em uma equação, uma quantidade desconhecida está debaixo do sinal radical, temos de tornar esta quantidade racional para podermos resolver a equação, isto

é, temos de fazer desaparecer o radical sem alterar a equação, para podermos achar o valor da incógnita.

Como já vimos na **secção 169,** prop. 5.ª, *se duas quantidades iguais forem elevadas à mesma potência, os dois resultados serão iguais.* Então para fazermos desaparecer o radical, temos duas direções:

Primeira direção. *Quando uma equação contém uma só expressão radical, transpõe-se esta expressão para um dos lados da equação, e os outros termos, para o outro, e depois quadrando os dois membros, faremos desaparecer o radical.*

Problema. Qual é o valor de x na equação $\sqrt{(x-1)}-1=2$?

Solução. Transpondo o termo -1 para o 2.º membro, temos $\sqrt{x-1}=3$. Quadrando agora estes dois membros da equação, temos $x-1=9$, ou $x=10$.

E' necessario que o discipulo se recorde que o quadrado de $\sqrt{x-1}$ é $x-1$, isto é, a mesma quantidade sem o sinal radical. O quadrado de $\sqrt{3}$ é 3.

Operação.

$$\sqrt{x-1}-1=2$$
$$\sqrt{x-1}=2+1=3$$
$$x-1=9$$
$$x=10$$

Segunda direção. *Quando há dois radicais, é geralmente preferível escrever um, de um lado da equação, e o outro do outro, antes de quadrar os seus membros.*

Problema. Qual é o valor de x na equação $\sqrt{(x-5)}-3=4-\sqrt{x-12}$.

Solução. Transpõe-se o termo -3 para o 2.º membro, e depois quadram-se os dois membros, e desaparece o sinal radical do 2.º membro.

O quadrado de $7-\sqrt{x-12}$ é $49-14\sqrt{x-12}+x-12$.

Transpondo-se agora o outro radical para o 1.º membro, e reunindo os outros termos no 2.º membro, temos $14\sqrt{x-12}=42$.

Operação.

$$\sqrt{x-5}-3=4-\sqrt{x-12}$$
$$\sqrt{x-5}=7-\sqrt{x-12}$$
$$x-5=49-14\sqrt{x-12}+x-12.$$
$$14\sqrt{x-12}=42$$
$$\sqrt{x-12}=3$$
$$x-12=9$$
$$x=9+12=21.$$

Como os números 14 e 42 são divisíveis por 14, podem ser simplificados, e a equação ficará sendo $\sqrt{x-12}=3$. Quadrando agora os dois membros da equação, temos $x-12=9$, ou $x=21$.

Achar o valor de x nas seguintes equações.

1. $\sqrt{x+3}+3=7.$	Resp.	$x=13.$
2. $x+\sqrt{x^2+11}=11.$	„	$x=5.$
3. $\sqrt{x}-2=\sqrt{x-8}.$	„	$x=9.$
4. $x+\sqrt{x^2-7}=7.$	„	$x=4.$
5. $2+\sqrt{3x}=\sqrt{5x+4}.$	„	$x=12.$
6. $\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x-5}.$	„	$x=9.$
7. $\sqrt{x+225}-\sqrt{x-121}-11=0.$	„	$x=1000.$
8. $\sqrt{x^2+8}-x=2.$	„	$x=1.$
9. $\sqrt{36+x}=18-\sqrt{x}.$	„	$x=64.$
10. $\sqrt{x+20}=\sqrt{x}+2.$	„	$x=16.$
11. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\sqrt{a}.$	„	$x=\frac{5a}{4}.$

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

318. Uma equação de segundo grau é a que tem a quantidade desconhecida no maior grau, elevada ao quadrado, isto é, com o expoente **2**, como: $x^2=16$, e $x^2+2x=24$.

319. As equações do segundo grau podem ser incompletas ou completas.

A equação do segundo grau se diz **completa** quando, reduzidos os seus termos semelhantes, contém termos do 2.º grau, do 1.º e do grau zero (termo independente) em relação à incógnita.

Exemplo: $x^2+2x=24$.

A equação do segundo grau se diz **incompleta** quando, reduzidos os seus termos semelhantes, falta o termo do 1.º grau ou o termo de grau zero (termo independente) em relação à incógnita. Ha, portanto, dois tipos de equação incompleta do segundo grau: aquele em que falta o termo do 1.º grau, como $x^2=16$, e aquele em que falta o termo independente, como $5x^2=8x$.

320. Quando uma equação aparece já reduzida ao limite dos seus termos, como as duas equações que acima apresentamos como exemplos, é muito fácil conhecer se ela é incompleta ou completa; mas, quando ela aparece muito complicada ou com muitos termos em ambos os membros, o meio mais seguro de conhecê-lo é reduzi-la à sua forma mais

simples, isto é, ao seu menor número de termos. Esta redução opera-se do mesmo modo que nas equações do primeiro grau, pois consiste unicamente em *inteirar os termos fracionários da equação, transpô-los, adicioná-los e reduzi-los ao menor número em que a equação pode ser expressa.*

321. Simplifiquemos algumas equações para se verificar qual é o menor número de termos a que cada uma pode ser reduzida.

1.° Exemplo:

Equação . . . . $\frac{x^2}{3}-3+\frac{5x^2}{12}=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}$
inteirando . . . . $8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299.$
transpondo . . . . $24x^2+8x^2+10x^2=7+72+299.$
adicionando . . . . $42x^2=378.$
dividindo por 42 . . . . $x^2=9.$

Esta equação, depois de reduzida, apresenta só dois termos que são x^2 e 9, e por isso é uma equação incompleta de segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o número 9 pela letra q, teremos $x^2=q$.

2.° Exemplo:

Equação . . . . $\frac{3+5x^2}{2}=\frac{7x+2}{4}+1$
inteirando . . . . $6+10x^2=7x+2+4.$
transpondo . . . . $10x^2=7x+2+4-6.$
reduzindo . . . . $10x^2=7x.$

Vemos que a equação dada, depois de reduzida, apresenta só dois termos, pois os termos independentes da incógnita anularam-se, desaparecendo. Si, agora, generalizarmos êste tipo de equação, representando o coeficiente de x^2 por a e o coeficiente de x por b, teremos

$$ax^2=bx$$

que é a forma geral da equação do segundo grau em que falta o termo independente da incógnita.

322. Simplifiquemos agora mais a seguinte equação para se reconhecer qual é o limite do número de seus termos:

Equação . . . . $\frac{7x^2}{3}+12+7x=\frac{4x^2}{3}+4x+40,$
inteirando . . . . $7x^2+36+21x=4x^2+12x+120,$
transpondo . . . . $7x^2-4x^2+21x-12x=120-36,$
adicionando . . . . $3x^2+9x=84,$
dividindo por 3 . . . . $x^2+3x=28,$

Esta equação, depois de reduzida, apresenta 3 termos que são x^2, $3x$ e 28, e por isso é uma equação completa do segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o valor de 3 por $2p$, e o valor de 28 por q, teremos $x^2+2px=q$. Esta expressão mostra o menor número de termos a que uma equação completa pode ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação completa à forma $x^2+2px=q$, quer dizer exprimí-la na sua forma mais simples.

323. Do que ficou exposto concluímos que *qualquer equação do segundo grau pode ser reduzida a uma equação incompleta de dois termos com a forma $x^2=q$ ou $ax^2=bx$ ou a uma equação completa de três termos com a forma $x^2+2px=q$.*

Resolução das equações incompletas da forma $x^2=q$

324. Problema. Qual é o valor de x na equação $5x^2-18=3x^2+14$?

Solução. Equação . . . . $5x^2-18=3x^2+14,$
transpondo os termos . . . . $5x^2-3x^2=14+18,$
reduzindo . . . . $2x^2=32,$
dividindo por 2 . . . . $x^2=16,$
extraindo a raiz quadrada . . . . $x=\pm 4.$

O processo é igual ao de uma equação de primeiro grau; chegando a $x^2=16$, extrai-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação, e ficará $x=\pm 4$.

Como já vimos na secção **297**, o sinal $\pm$ que precede ao número 4, quer dizer que o valor de x pode ser $+4$ ou -4. Ora como x tem dois valores ou raízes, costuma-se representá-los, separadamente, um por x' e outro x''. De sorte que $x=\pm 4$ também pode ser expresso dêste modo: $x'=4$. e $x''=-4$.

325. Em Aritmética, como se opera sòmente com números positivos, um quadrado tem só uma raiz, como $4\times 4=16$. Mas, em Álgebra, há também quadrados de números negativos; assim, o quadrado de -4 é $(-4)\times(-4)=16$, porque menos multiplicado por menos dá mais. Portanto 16 pode ser o quadrado de $+4$ ou de -4. Do que fica exposto, vemos que

1.° *Toda equação incompleta do segundo grau da forma $x^2=q$ tem duas raízes.*

2.° *Estas raízes são numericamente iguais, mas teem sinais contrários.*

II Problema. Achar o valor de x na equação de $5x^2+4=49$.

$$5x^2+4=49$$
$$5x^2=45$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm 3.$$

Solução. Transpondo o termo 4, para a direita, a equação ficará $5x^2=49-4$ ou $5x^2=45$. Dividindo os dois membros por 5, temos $x^2=9$, e $x=\pm 3$. Ou $x'=3$ e $x''=-3$.

III Problema. Achar o valor de x na equação $\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=5\frac{2}{3}$?

$$\frac{2x^2}{3}+\frac{3x^2}{4}=5\tfrac{2}{3}$$
$$8x^2+9x^2=68$$
$$17x^2=68$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2.$$

Solução. Inteirando a equação, e reunindo os termos semelhantes, temos $17x^2=68$.

Simplificando estes termos, dividindo-os por 17, temos $x^2=4$; então $x=\pm 2$, ou $x'=2$ e $x''=-2$.

IV Problema. Achar o valor de x na equação $ax^2+b=cx^2+d$.

$$ax^2+b=cx^2+d$$
$$ax^2-cx^2=d-b$$
$$x^2(a-c)=d-b$$
$$x^2=\frac{d-b}{a-c}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{d-b}{a-c}}.$$

Solução. Transpondo para a esquerda o termo que tem a letra x, e pondo x^2 em evidencia temos $x^2(a-c)=d-b$. Então $x^2=\frac{d-b}{a-c}$, e x igual à raiz quadrada desta fração.

326. Para resolvermos uma equação incompleta do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. *Reduz-se a equação à forma* $x^2=q$, *e depois extrai-se a raiz quadrada de ambos os membros da equação.*

Achar o valor de x em cada uma das seguintes equações:

1. $x^2-8=28$. Resp. $x=\pm 6$.
2. $3x^2-15=83+x^2$. " $x=\pm 7$.
3. $7x^2-25=4x^2-13$. " $x=\pm 2$.
4. $a^2x^2-b^2=0$. " $x=\pm\frac{b}{a}$.
5. $5x^2-2=8-35x^2$. " $x=\pm\frac{1}{2}$.
6. $\frac{5x^2}{3}+12=\frac{8x^2}{7}+37\frac{2}{3}$. " $x=\pm 7$.
7. $6x^2-48-2x^2=96$. " $x=\pm 6$.
8. $\frac{4x^2+5}{9}=45$. " $x=\pm 10$.
9. $x^2-36=\frac{x^2}{4}+12$. " $x=\pm 8$.
10. $3x^2-200=\frac{x^2}{4}+196$. " $x=\pm 12$.

Resolver os seguintes problemas que produzem equações incompletas do segundo grau:

1. Achar um número cujos $\frac{2}{3}$ multiplicados pelos seus $\frac{2}{5}$ darão um produto igual a 60.

Solução. Seja x o número; então ..... $\frac{2x}{3}\times\frac{2x}{5}=60$ ou $\frac{4x^2}{15}=60$,

inteirando . . . . $4x^2=900$,
dividindo por 4 . . . . $x^2=225$,
resposta . . . . $x=\pm 15$.

2. Multiplicando-se $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$ de certo número, o produto é 108; qual é o número? Resp. ± 36.

3. Qual é o número cujo quadrado menos 16 é igual à metade do seu quadrado mais 16? Resp. ± 8.

4. Qual é o número cujo quadrado menos 54 é igual ao quadrado da sua metade mais 54? Resp. ?

5. Qual é o número que, sendo dividido por 9, dá o mesmo quociente que 16 dividido pelo número? Resp. ?

6. Dois números estão um para o outro na razão de 3 para 5, e a diferença entre os seus quadrados é 64. Quais são os números? Resp. ± 6 e ± 10

Solução. Sejam $3x$ o número menor, e $5x$ o número maior. Quadrando estes números, e formando a equação, temos $25x^2-9x^2=64$. Resolvida a equação, temos $x=\pm 2$. Então um dos números, que é $3x$, é igual a ± 6, e o outro é igual a ± 10.

7. Quais são os números que estão na razão de 3 para 4, e a diferença entre os seus quadrados é 63? Resp. ?

8. Qual é o número que, se lhe juntarmos 3, e se dêle subtrairmos 3, o produto desta soma e desta diferença será 40?

Solução. $(x+3)\ (x-3)=40$; $x^2-9=40$, e $x=\pm 7$.

9. Um homem perguntou a outro quantos cruzeiros tinha no bolso, e êste respondeu: Se ao quadrado do número fossem acrescentados 6 cruzeiros, eu teria 42. Quantos cruzeiros tinha no bolso? Resp. Cr $6,00

10. Qual é o número cuja oitava parte, sendo multiplicada pela sua quinta parte, e o produto dividido por 4, dá o quociente igual a 40? Resp. ± 80.

Resolução das equações incompletas da forma $ax^2=bx$

327. Problema I. Resolver a equação $5x^2=2x$.

Solução. À primeira vista, nota-se que esta equação se satisfaz para $x=0$, pois, dando a x o valor 0, os dois termos da equação se anulam.

Mas, a equação $5x^2=2x$, como toda equação do 2.° grau, tem duas raízes. Vejamos como se pode determinar a outra raiz. Para isso, dividamos os dois termos por x; encontramos $5x=2$. Ora, esta equação, resolvida fornece-nos o outro valor de $x=\frac{2}{5}$.

$$5x^2 = 2x$$
$$5x = 2$$
$$x = \tfrac{2}{5}$$

E' fácil verificar que $\frac{2}{5}$ satisfaz a equação dada e é, portanto, sua segunda raiz. Com efeito, substituindo x por $\frac{2}{5}$ na equação $5x^2=2x$, obtem-se, no primeiro membro

$$5\times(\tfrac{2}{5})^2=5\times\tfrac{4}{25}=\tfrac{4}{5}$$

que é o valor obtido para $2x$ quando se faz $x=\frac{2}{5}$.

Problema II. Resolver a equação $ax^2=bx$.

Solução. A primeira raiz da equação é zero. Para obter a outra, dividamos ambos os membros por x. Achamos $ax=b$.

Se dividirmos ambos os membros por a, obteremos $x=\dfrac{b}{a}$ que é a outra raiz da equação $ax^2=bx$.

Nota. O professor mostre ao discípulo que se não deve multiplicar ou dividir os termos da equação por uma quantidade que contenha a incógnita. Neste caso, podemos fazê-lo porque já havíamos determinado a primeira raiz, que, como se viu, é sempre nula.

328. Do que ficou exposto, concluímos que:

1.° *Toda equação incompleta da forma* ax²=bx *tem duas raízes, sendo que uma delas é sempre zero.*

2.° *A outra raiz é igual a* $\frac{b}{a}$, *isto é, ao coeficiente de* x *dividido pelo coeficiente de* x².

Problema III. Achar o valor de x na equação $7x^2+5x=8x-9x^2$.

Solução. Passando 5x para o segundo membro e $-9x^2$ para o primeiro, a equação ficará $16x^2=3x$. Dividindo os dois membros por x, temos $16x=3$, de onde se deduz $x=\frac{3}{16}$. Resposta: $x'=0$ e $x''=\frac{3}{16}$.

$$7x^2+5x=8x-9x^2$$
$$16x^2=3x$$
$$16x=3$$
$$x=\tfrac{3}{16}$$

Problema IV. Resolva a equação $ax^2+5x=bx+9x^2$.

Solução. Transpondo $5x$ e $9x^2$, temos a equação $ax^2-9x^2=bx-5x$. Pondo x^2 em evidência no primeiro membro e o mesmo fazendo a x no segundo membro, fica $(a-9)\,x^2=(b-5)x$. Dividindo os dois membros por x, achamos $(a-9)x=b-5$ e, finalmente, $x=\dfrac{b-5}{a-9}$.

Resposta: $x'=0$ e $x''=\dfrac{b-5}{a-9}$.

$$ax^2+5x=bx+9x^2$$
$$ax^2-9x^2=bx-5x$$
$$(a-9)x^2=(b-5)x$$
$$(a-9)x=b-5$$
$$x=\frac{b-5}{a-9}$$

329. Há, então, para resolver uma equação do 2.° grau que, reduzida, não apresenta termos independentes em relação à incógnita, a seguinte

Regra. *Reduz-se a equação à forma* ax²=bx; *dividem-se os dois membros por* x *e, em seguida, por* a. *A outra raiz é sempre zero.*

Resolver as seguintes equações:

1. $3x^2-4x=x^2$. — Resp. $x'=0$, $x''=2$
2. $7x^2-5x=6x^2-2x$. — " $x'=0$, $x''=3$
3. $x^2-4x=7x-9x^2$. — " $x'=0$, $x''=\frac{11}{10}$
4. $\frac{3x}{5}+2x^2=\frac{2x}{3}$. — " $x'=0$, $x''=\frac{1}{30}$

Resolução das equações completas do segundo grau

330. Já vimos no **n.° 323** que uma equação completa do segundo grau, estando reduzida, contém sòmente três termos, como: $x^2+6x=40$. Ora, como o primeiro membro de uma equação completa é um binômio, precisamos saber acrescentar-lhe mais um termo para o tornar quadrado perfeito.

331. Se elevarmos a quantidade $(x+3)$ ao seu quadrado, teremos $(x+3)^2=x^2+6x+9$ (**n.° 93**). Vemos aqui que o quadrado da soma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira quantidade, que é $x\times x=x^2$; mais duas vezes

o produto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, que é $2(x \times 3)=6x$; mais o quadrado da segunda quantidade que é $3 \times 3=9$.

Se tivermos sòmente os dois primeiros termos x^2+6x, e quisermos achar o terceiro termo, será facil determiná-lo, porque sendo o segundo termo ($6x$) produto da primeira quantidade multiplicada pela segunda tomado duas vezes $2(x \times 3)$, segue-se que uma vez só é $x \times 3$; e neste produto x é a primeira quantidade, e 3 é a segunda. Ora, como o termo que temos de juntar é o quadrado da segunda quantidade, segue-se que temos de juntar o quadrado de 3, que é $3 \times 3=9$. Juntando êsse termo, temos x^2+6x+9.

Podemos, pois, considerar os dois termos do primeiro membro de uma equação completa do segundo grau como um quadrado a que falta o último termo, para ficar completo.

Problema. Que termo ou quantidade devemos juntar ao binômio x^2+x para o tornar quadrado perfeito?

Solução. Se o segundo termo x é duas vezes o produto da primeira quantidade multiplicada pela segunda, uma só vez será $\frac{x}{2}$. Ora, neste produto, sendo x um dos fatores, o outro deve ser $\frac{1}{2}$ porque $x \times \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$. E como o termo que falta é o quadrado da segunda quantidade, segue-se que lhe devemos juntar o quadrado de $\frac{1}{2}$ que é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. O quadrado perfeito é, portanto, $x^2+x+\frac{1}{4}$.

Regra. *Para se completar um quadrado, acrescenta-se aos dois termos dados o quadrado da metade do coeficiente de x.*

Nota. No problema acima resolvido, o coeficiente de x é 1 subentendido (nº. **23**). A metade de 1 é $\frac{1}{2}$ e o quadrado de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$. No exemplo precedente, o coeficiente de x é 6, e a metade de 6 é 3, e o quadrado de 3 é 9.

Completar o quadrado nas seguintes expressões:

1.	x^2+10x.	Resp.	$x^2+10x+25$.
2.	x^2-12x.	„	$x^2-12x+36$.
3.	x^2+8x.	„	$x^2+8x+16$.
4.	x^2-16x.	„	?
5.	x^2+3x.	„	?
6.	x^2-5x.	Resp.	?
7.	x^2-x.	„	$x^2-x+\frac{1}{4}$.
8.	$x^2+\frac{3x}{2}$.	„	$x^2+\frac{3x}{2}+\frac{9}{16}$.
9.	x^2-11x.	„	?
10.	$x^2+\frac{4x}{5}$.	„	?

Achar as raizes das equações completas

332. Como já sabemos completar o quadrado, resta-nos agora sòmente juntar ao segundo membro da equação o mesmo termo ou quantidade que juntamos ao primeiro, afim de conservarmos a igualdade entre estes dois valores, e podermos resolver a equação.

I Problema. Quais são as raizes da equação $x^2+8x=33$?

Solução. Para completarmos o quadrado no primeiro membro da equação, temos de adicionar-lhe o número 16; e para que a igualdade não fique alterada, temos de adicionar também 16 ao segundo membro. Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, achamos que a raiz do 1.º membro é $x+4$, e a do 2.º é $+7$ ou -7, porque ambas estas raízes dão o quadrado 49. O valor de x aparece finalmente com a forma de -4 ± 7, isto quer dizer que, se o número 7 fôr tomado no sentido positivo, o valor de x será -4 mais $+7=3$; mas se fôr tomado no sentido negativo, o valor x será -4 mais $-7=-11$. A equação dada tem, portanto, duas respostas ou raízes: uma positiva que é $x'=3$; e a outra negativa que é $x''=-1$.

$$x^2+8x=33$$
$$x^2+8x+16=33+16$$
$$x^2+8x+16=49$$
$$x+4=\pm7$$
$$x=-4\pm7$$
$$x'=3$$
$$x''=-11.$$

Verifiquemos agora como estas duas raízes satisfazem os valores da equação.

$$3^2+(8\times3)=9+24=33.$$
$$(-11)^2+8\times(-11)=121-88=33.$$

II Problema. Resolver a equação $x^2-6x=16$.

Solução. Completa-se o quadrado no primeiro membro somando 9 e soma-se tambem 9 ao segundo membro; e extraída finalmente a raiz quadrada, o resultado é $x-3=\pm5$.

O valor de x é 8 ou -2.

O discípulo fará a verificação.

$$x^2-6x=16$$
$$x^2-6x+9=16+9$$
$$x^2-6x+9=25$$
$$x-3=\pm5$$
$$x'=3+5=8$$
$$x''=3-5=-2.$$

III Problema. Achar o valor de x na equação $3x-5=\frac{7x+36}{x}$.

Solução. Equação . . . . $3x-5=\frac{7x+36}{x}$,

inteirando a equação ...... $3x^2-5x=7x+36$,
transpondo os termos .... $3x^2-12x=36$,
dividindo os termos por 3.. $x^2-4x=12$,
completando o quadrado ... $x^2-4x+4=16$,
extraíndo as raízes .... $x-2=\pm 4$,
valores de . . . . $x=2\pm 4$,
$x'=2+4=6$,
$x''=2-4=-2$.

Para resolvermos uma equação completa do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. *Reduz-se a equação à forma $x^2+2px=q$; acha-se depois o quadrado da metade do coeficiente do segundo termo, e junta-se a ambos os membros da equação.*

Extrai-se a raiz quadrada de ambos os membros, e transpõe-se o termo conhecido para o segundo membro.

Resolver cada uma das seguintes equações completas do segundo grau.

1.	$x^2+8x=20$.	Resp.	$x=2$ ou -10.
2.	$x^2+16x=80$.	„	$x=4$ ou -20.
3.	$x^2+7x=78$.	„	$x=6$ ou -13.
4.	$x^2+3x=28$.	„	$x=4$ ou -7.
5.	$x^2-10x=24$.	„	$x=12$ ou -2.
6.	$x^2-8x=20$.	„	$x=10$ ou -2.
7.	$x^2-5x=6$.	„	$x=6$ ou -1.
8.	$x^2-21x=100$.	„	$x=25$ ou -4.
9.	$x^2+6x=-8$.	„	$x=-2$ ou -4.
10.	$x^2+4x=-3$.	„	$x=-1$ ou -3.
11.	$x^2-6x=-8$.	„	$x=4$ ou 2.
12.	$x^2-8x=-15$.	„	$x=5$ ou 3.
13.	$x^2-10x=-21$.	„	$x=7$ ou 3.
14.	$x^2-15x=-54$.	„	$x=9$ ou 6.
15.	$3x^2-2x+123=256$.	„	$x=7$ ou $-\frac{19}{3}$.
16.	$2x^2-5x=12$.	„	$x=4$ ou $-\frac{3}{2}$.

17.	$2x^2+3x=65$.	Resp:	$x=5$ ou $-\frac{13}{2}$.
18.	$\frac{2x^2}{3}-\frac{5x}{2}=\frac{2}{3}$.	„	$x=4$ ou $-\frac{1}{4}$.
19.	$\frac{x^2}{100}=x-24$.	„	$x=60$ ou 40.
20.	$x^2-x-40=170$.	„	$x=15$ ou -14.
21.	$x^2=\frac{6-x}{2}$.	„	$x=\frac{3}{2}$ ou -2.
22.	$x-1+\frac{2}{x-4}=0$.	„	$x=3$ ou 2.
23.	$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$.	„	$x=2$ ou 4.
24.	$3x^2+5x=2$.	„	$x=\frac{1}{3}$ ou -2.

Resolver os seguintes problemas que produzem equações completas do segundo grau:

I Problema. Qual é o número cujo quadrado somado com 15, dá um resultado igual a 8 vezes êsse número?

Solução. Seja x o número; então temos:

Equação. . . . . $x^2+15=8x$,
transpondo os termos . . . . $x^2-8x=-15$,
completando o quadrado. . . $x^2-8x+16=16-15=1$,
extraindo a raiz quadrada. . $x-4=\pm 1$,
valores da incógnita. . . . ... $x'=5$,
$x''=3$.

II Problema. Dividir o número 24 em duas partes, de sorte que o produto dessas partes seja 95.

Solução. Seja x um dos números; então $24-x$ será o outro.

Equação . . . . $x(24-x)=95$,
tirando o parêntesis .... $24x-x^2=95$,
mudando os sinais .... $x^2-24x=-95$,
completando o quadrado .... $x^2-24x+144=49$,
extraindo a raiz quadrada .. $x-12=\pm 7$,
valores da incógnita .... $x'=19$,
$x''=5$.

III Problema. Um fazendeiro comprou certo número de carneiros por Cr \$80,00; se êle tivesse comprado o mesmo número e mais 4 carneiros pelos mesmos \$80,00, o preço de cada carneiro seria \$1,00 menos. Quantos carneiros comprou?

Solução. Seja x o número dos carneiros, então $\frac{80,00}{x}$ é o preço que custou cada carneiro; e $\frac{80,00}{x+4}$ o preço que custaria se êle comprasse mais 4. A diferença dos dois preços deve ser igual a \$1,00.

Então $\frac{80,00}{x} - \frac{80,00}{x+4} = 1,00$. Resolvida esta equação, achamos que o valor de x é 16, número de carneiros que o fazendeiro comprou.

4. Qual o número inteiro e positivo cujo quadrado adicionado com 6 vezes o número dará 55. Resp. 5.

5. Do quadrado de um número inteiro e positivo subtraindo 6 vezes o mesmo número, restará 7. Qual é o número? Resp. 7.

6. Achar o número inteiro e positivo cujo dôbro do quadrado mais 3 vezes o número dará 65. Resp. 5.

7. Achar dois números tais que a sua diferença seja 6 e o seu produto seja 160. Resp. 10 e 16 ou —10 e —16.

8. Achar dois números cuja soma seja 23, e cujo produto seja 132. Resp. 11 e 12.

9. Dividir o número 50 em duas partes, de sorte que o seu produto seja 544. Resp. ?

10. Dividir o número 30 em duas partes, de sorte que o seu produto seja igual a oito vezes a sua diferença. Resp. 6 e 24.

11. Perguntando-se a um menino que estudava Álgebra, qual era a sua idade, êle respondeu: Se do quadrado da minha idade subtrairdes $\frac{3}{8}$ da minha idade, o resultado será 250 anos. Quantos anos tinha o mesmo? Resp. 16 anos.

12. Um professor dividiu 144 laranjas pelos seus discípulos; se houvesse mais dois alunos, cada um dêles teria recebido uma laranja de menos. Qual era o número de discípulos? Resp. 16.

Formas da equação completa do segundo grau

333. Se examinarmos com atenção os exercícios 1.°, 5.°, 9.° e 12.° da **secção 332**, notaremos que as equações dêstes exercícios apresentam aspectos diferentes como podemos verificar, pondo-as em uma ordem seguida.

1.° exercício, $x^2+8x=20$,	Resp.	$x=2$ ou -10.
5.° exercício, $x^2-10x=24$,	»	$x=12$ ou -2.
9.° exercício, $x^2+6x=-8$,	»	$x=-2$ ou -4.
12.° exercício, $x^2-8x=-15$.	»	$x=5$ ou 3.

334. O termo x^2 é sempre positivo em todas, mas o termos $2px$ e q são ambos positivos na 1.ª; o primeiro é negativo e outro positivo na 2.ª; o primeiro é positivo e outro negativo na 3.ª, e finalmente ambos são negativos na 4.ª.

335. Daqui concluímos que *toda equação completa do segundo grau pode ser reduzida à forma* $x^2+2px=q$, *na qual os termos* $2px$ *e* q *podem ser ambos quantidades positivas ou negativas, ou um ser positivo e o outro negativo.*

336. Vamos agora achar as raízes de uma equação completa do segundo grau na sua forma geral.

Problema. Qual é o valor de x na equação $x^2+2px=q$?

Solução. Para resolvermos esta equação, temos de completar o quadrado do primeiro membro, juntando o quadrado da metade do coeficiente de x (n.° **331**). Ora o coeficiente de x é $2p$; a metade de $2p$ é p, e o quadrado de p é p^2. Juntando p^2 ao primeiro membro, temos de juntá-lo também ao segundo para conservar a igualdade.

A equação é pois	$x^2+2px=q$,
completando o quadrado	$x^2+2px+p^2=q+p^2$,
extraindo a raiz quadrada ..	$x+p=\pm\sqrt{q+p^2}$,
Primeira raiz	$x'=-p+\sqrt{q+p^2}$,
Segunda raiz	$x''=-p-\sqrt{q+p^2}$.

Nota. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida tem uma só raiz ou resposta, como ficou demonstrado na **secção 214**; uma equação do segundo grau tem duas raízes, podendo ambas ser positivas ou negativas, ou uma positiva e a outra negativa.

337. Fazendo variar os sinais de $2px$ e de q, obteremos as seguintes raízes:

(1.ª)	$x^2+2px=q$...	Raiz	$x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$.
(2.ª)	$x^2-2px=q$.	»	$x=+p\pm\sqrt{q+p^2}$.
(3.ª)	$x^2+2px=-q$.	»	$x=-p\pm\sqrt{-q+p^2}$.
(4.ª)	$x^2+2px=-q$.	»	$x=+p\pm\sqrt{-q+p^2}$.

Achar as raízes de uma equação completa por meio da sua forma generalizada

338. I Problema. Quais são as raízes da equação $x^2+8x=20$?

Solução. Esta equação tem a primeira forma, e a raiz desta forma é $x=-p\pm\sqrt{q+p^2}$ (n.° **337**). Vemos nos dados do problema, que $q=20$, $p=\frac{8}{2}=4$, e $p^2=4\times4=16$. Substituindo agora estas letras pelos seus respectivos valores, temos

$$x=-4\pm\sqrt{20+16}$$
$$x=-4\pm6, \text{ isto é, } +2 \text{ ou } -10.$$

II Problema. Quais são os valores de x na equação $x^2-10x=24$?

Solução. Esta equação tem a segunda forma, e a raiz desta forma é $x=+p\pm\sqrt{q+p^2}$ (n.° **337**). Nos dados do problema, vemos que $q=24$, $p=\frac{10}{2}=5$, e $p^2=25$. Substituindo agora, nesta raiz, estas letras pelos seus 'eus respectivos valores, temos

$$x=+5\pm\sqrt{24+25}$$
$$x=+5\pm7, \text{ isto é, } +12 \text{ ou } -2.$$

As raízes das outras formas acham-se do mesmo modo.

Os discípulos devem agora resolver por êste processo todos os exercícios da **secção 332.**

Propriedades da equação completa do segundo grau

339. Já vimos na **secção 336** que a forma $x^2+2px=q$ tem duas raízes que são

$$\begin{array}{r} x' = -p+\sqrt{q+p^2} \\ x'' = -p-\sqrt{q+p^2} \\ \hline -2p \end{array}$$

Somando estas duas raízes, temos $-2p$, isto é, o coeficiente de x com o sinal trocado. Daquí estabelecemos a

1.ª Propriedade. *Em uma equação do segundo grau da forma $x^2+2px=q$, a soma das duas raízes é igual ao coeficiente do segundo termo com o sinal trocado.*

340. Se multiplicarmos as duas raízes, o produto será $p^2-(q+p^2)$, tirando o parêntesis, ficará p^2-q-p^2, isto é, $-q$. Ora $-q$ é o termo conhecido do segundo membro com o sinal contrário. Daquí podemos estabelecer a

$$\begin{array}{rl} -p+\sqrt{q+p^2} & \textit{1.ª raiz} \\ -p-\sqrt{q+p^2} & \textit{2.ª raiz} \\ \hline p^2-p\sqrt{q+p^2} & \\ +p\sqrt{q+p^2}-(q+p^2) & \\ \hline p^2 \;\ldots\ldots\; -(q+p^2) & \end{array}$$

2.ª Propriedade. *Em uma equação do segundo grau da forma $x^2+2px=q$ o produto das duas raízes é igual ao termo conhecido do segundo membro com o sinal contrário.*

341. Estas duas propriedades são de grande importância, porque se a soma das duas raízes dá o coeficiente de x, e o produto dá o segundo membro, podemos facilmente formar ou achar qualquer equação completa por meio sòmente das duas raízes.

Exemplo. As raízes de uma equação são $+4$ e -5; qual é a equação?

Solução. Para formar esta equação, precisamos achar o coeficiente de x, e o valor do termo do segundo membro. Ora a soma das duas raízes $+4$ e -5 é -1, com o sinal contrário é $+1$; portanto o coeficiente de x é $+1$. O produto das duas raízes $+4$ e -5 é -20, com o sinal contrário fica $+20$; portanto o termo do segundo membro é $+20$, e a equação é $x^2+1x=20$ ou $x^2+x=20$.

Para se formar uma equação, sendo dadas as suas raízes, temos a seguinte regra:

Regra. *A soma das raízes com o sinal contrário dará o coeficiente de* **x.**

O produto das raízes com o sinal contrário dará o termo do segundo membro.

Formar as seguintes equações:

1. Qual é a equação que tem as raízes $+9$ e -10?
Resp. $x^2+x=90$.

2. Formar uma equação, sendo dadas as raízes $+6$ e -10.
Resp. $x^2+4x=60$.

3. Se as raízes de uma equação são $+8$ e -2, qual é a equação?
Resp. $x^2-6x=16$.

4. Qual é a equação cujas raízes são -6 e -7?
Resp. $x^2+13x=-42$.

Trinômio do segundo grau

Se tomarmos qualquer equação completa do segundo grau, por exemplo, a equação $x^2+8x=20$, e transpusermos o termo 20 para o primeiro membro, teremos $x^2+8x-20=0$. A expressão que figura no primeiro membro é um trinômio do segundo grau e tem a propriedade de se decompor em dois fatores binômios, sendo um fator x e a raiz $+2$ com o sinal contrário, ou $(x-2)$; e o outro fator x e a raiz -10 com o sinal contrário ou $(x+10)$. Os dois fatores são, pois, $(x-2)$ e $(x+10)$; com efeito $(x-2)(x+10)=x^2+8x-20$. Indaguemos agora como poderemos achar as raízes -2 e $+10$ sem resolver a equação $x^2+8x=20$.

Já vimos que a soma das duas raízes dá o coeficiente de x com o sinal contrário, e que o produto das mesmas raízes dá o termo conhecido do segundo membro com o sinal contrário, ou o terceiro termo do trinômio com o mesmo sinal. Ora, se procurarmos dois números cujo produto seja igual a -20, teremos -4 e 5 ou -2 e 10. Os dois primeiros, como não somam algèbricamente 8, não servem para o caso; os dois últimos, como somam algèbricamente 8, são os números ou raízes requeridas, porque $(-2)\times(+10)=-20$; e tambem

$$(-2)+(+10)=8.$$

Chegamos, então, à seguinte conclusão:

342. *Um trinômio do segundo grau pode ser decomposto em dois fatores binômios, dos quais o primeiro termo de cada um é* **x**, *e o segundo, uma das raizes com o sinal contrário.*

Decompor as seguintes expressões:

1. Achar os fatores de x^2+6x+8.
Resp. $(x+2)(x+4)$.

2. Decompor a expressão $x^2+6x-27$ em seus fatores.
Resp. $(x-3)(x+9)$.

3. Decompor a expressão $x^2-2x-24$ em seus fatores.
Resp. $(x-6)(x+4)$.

4. Achar os fatores da expressão x^2-x-42. Resp. ?

Sistemas do segundo grau de duas equações com duas incógnitas

343. Para resolver um sistema do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas, temos de eliminar uma delas, afim de obtermos uma equação simples, com uma só quantidade desconhecida.

I Problema. Achar os valores de x e y nas equações $x-y=2$ e $x^2+y^2=100$.

Solução. O valor de x na (1.ª) equação é $x=2+y$ ou $y+2$. Quadrando este valor, temos $(y+2)^2=$ $=y^2+4y+4$. Substituindo agora na (2.ª) equação a quantidade x^2 pelo seu valor, temos a (3.ª) equação; reduzindo, temos a (4.ª). Dividindo os seus termos por 2, temos a (5.ª). Subtraindo agora 1 em ambos os membros para tornar o primeiro membro quadrado perfeito, temos a (6.ª). Extraída a raiz quadrada de ambos os membros, segue-se o processo já conhecido, que dá $y=6$ ou -8 e $x=8$ ou -6, respectivamente.

$$x-y=2 \quad (1.^a)$$
$$x^2+y^2=100 \quad (2.^a)$$
$$y^2+4y+4+y^2=100 \quad (3.^a)$$
$$2y^2+4y+4=100 \quad (4.^a)$$
$$y^2+2y+2=50 \quad (5.^a)$$
$$y^2+2y+1=49 \quad (6.^a)$$
$$y+1=\pm 7$$
$$y=-1\pm 7, \text{ isto é, } 6 \text{ ou } -8$$
$$x=y+2=8 \text{ ou } -6,$$

II Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=8$ e $xy=15$?

Solução. O valor de x na (1.ª) equação é $x=8-y$; substituindo agora na (2.ª) equação a letra x pelo seu valor $8-y$, temos a (3.ª) equação que, sem parêntesis, dá a (4.ª). Mudando o lugar e os sinais dos termos, temos a (5.ª). Resolvida esta equação, como aprendemos na **secção 337,** segue-se o processo já conhecido, que dá $y=5$ ou 3 e $x=3$ ou 5. respectivamente.

$$x+y=8 \quad (1.^a)$$
$$xy=15 \quad (2.^a)$$
$$(8-y)\,y=15 \quad (3.^a)$$
$$8y-y^2=15 \quad (4.^a)$$
$$y^2-8y=-15 \quad (5.^a)$$
$$y=5 \text{ ou } 3$$
$$x=3 \text{ ou } 5.$$

III Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x^2+y^2=164$, e $xy=80$?

Solução. Multiplicando a (2.ª) equação por 2, e somando-a depois com a (1.ª), temos a (3.ª) equação, que são dois quadrados perfeitos. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, achamos que o valor de x é $18-y$.

Substituindo agora na (2.ª) equação a letra x pelo seu valor, temos a (4.ª) equação que, tirado o parêntesis e mudados os têrmos, se transforma na (5.ª)

Resolvida esta equação **(n. 337),** achamos que os valores de y são 10 e 8; os de x, 8 e 10, respectivamente.

$$x^2+y^2=164 \quad (1.^a)$$
$$xy=80 \quad (2.^a)$$
$$\left.\begin{array}{r}2xy=160\\ x^2+y^2=164\end{array}\right\}$$
$$x^2+2xy+y^2=324 \quad (3.^a)$$
$$x+y=18$$
$$x=18-y$$
$$(18-y)y=80 \quad (4.^a)$$
$$y^2-18y=-80 \quad (5.^a)$$

Achar o valor de x e y nos seguintes sistemas:

1. $x+y=16$ — Resp. $x=9$ ou 7.
   $xy=63$. — » $y=7$ ou 9.
2. $x-y=5$. — » $x=9$ ou -4.
   $xy=36$. — » $y=4$ ou -9.
3. $x+y=9$. — » $x=7$ ou 2.
   $x^2+y^2=53$. — » $y=2$ ou 7.
4. $x-y=5$. — » $x=8$ ou -3.
   $x^2+y^2=73$. — » $y=3$ ou -8.
5. $x+y=11$. — » $x=6$.
   $x^2-y^2=11$. — » $y=5$.
6. $x^2+y^2=34$. — » $x=\pm 3$.
   $x^2-y^2=16$. — » $y=\pm 5$.

O discípulo deve agora resolver os seguintes problemas que produzem equações do segundo grau com duas incógnitas:

1. A soma de dois números é 10, e a soma dos seus quadrados é 52; quais são os números?
Resp. 4 e 6.

2. A diferença de dois números é 3, e a diferença dos seus quadrados é 39; quais são os números?
Resp. ?

3. Dividir o número 25 em duas partes, de sorte que a soma dos quadrados dessas partes seja 425; quais são as partes?
Resp. ?

4. Dividir o número 10 em duas partes, de sorte que o produto dessas partes exceda 22 à sua diferença.
Resp. 6 e 4 ou 2 e 8

5. A soma de 6 vezes um de dois números, e 5 vezes o outro é 50, e o seu produto é 20; quais são êsses números?
Resp. 5 e 4 ou $\frac{10}{3}$ e 6.

6. A soma dos quadrados de dois números é 13, e a diferença dêsses quadrados é 5; quais são os números?
Resp. ?

7. A diferença de dois números multiplicada por um dêles é =16, mas multiplicada pelo outro é =12; quais são os números?
Resp. 8 e 6 ou —8 e —6.

8. Achar dois números cujo produto seja 54, e o quociente de um dêles dividido pelo outro seja 6.
Resp. ?

9. A soma dos quadrados de dois números é a, e a diferença dêsses quadrados é b; quais são os números?
Resp. $\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ e $\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

10. Achar dois números que estejam um para o outro, assim como 3 está para 4, e a soma dos seus quadrados seja 400?
Resp. ± 12 e ± 16.

EQUAÇÕES BIQUADRADAS

344. Uma equação que apenas tem no primeiro membro a segunda e a quarta potências da incógnita e no segundo membro a quantidade conhecida, chama-se **equação biquadrada;** assim $x^4+4x^2=32$ e $x^4-13^2=-36$ são equações biquadradas.

Há vários modos de resolver uma equação biquadrada, mas a mais simples e fácil é substituir as potências x^2 e x^4 da incógnita por y e y^2, no que fica o resultado reduzido logo a uma equação do segundo grau; e depois resolve-se esta equação, como já aprendemos no número **337.**

Problema. Achar o valor de x na seguinte equação biquadrada: $x^4-10x^2=96$.

Solução. Substituindo nesta equação as potências de x^2 e x^4 por y e y^2,

temos . . . . $y^2-10y=96$,

quadrando a equação . . . . $y^2-10y+25=96+25$,

extraindo a raiz quadrada. . . . . $y-5=\pm 11$,

valor de y . . . . $y=\pm 11+5$,

ou . . . . $y=16$ ou -6.

$x^2=16$ ou -6.

Como $y=x^2$, segue-se que . . . . . $x=\pm 4$ ou $\pm\sqrt{-6}$.

Podemos facilmente verificar a exatidão dêste resultado, substituindo as duas potências da incógnita pelos respectivos valores:

$$x^4=4^4=256;\ 10x^2=10\times(4^2)=160;\ \text{então } 256-160=96.$$

Como acabámos de ver y tem duas raizes ou valores: o positivo 16 e o negativo -6. De cada um dêles poderemos tirar dois valores para x. Com efeito: Si $x^2=y$.

$$x=\sqrt{y}=\begin{cases}\pm\sqrt{16}=\pm 4\\ \pm\sqrt{-6}\end{cases}$$

A equação biquadrada apresenta-nos, pois, quatro soluções a saber: $+4$, -4, $+\sqrt{6}$ e $-\sqrt{-6}$. Num compêndio elementar, como o nosso, não trataremos destas duas últimas. Diremos apenas que tais soluções se chamam *imaginárias* e tiram o nome do fato de serem quaisquer expressões da forma $\sqrt{-a}$ chamadas *expressões imaginárias*. E' que não há quantidade positiva, negativa ou nula, que, elevada ao quadrado, dê uma expressão da forma $-a$. As outras raizes (positivas, negativas ou nulas) se dizem *reais*.

A equação biquadrada pode ter as quatro raizes reais (sendo 2 positivas e 2 negativas), pode ter duas raizes reais e duas imaginárias ou, então, as quatro raizes imaginárias.

Em todos os nossos exercícios, entretanto, indicaremos sòmente as soluções *reais*. As soluções reais são, de um modo geral, as que se originam do valor positivo de y.

345. As equações que não forem biquadradas, mas tiverem as duas potências da incógnita de modo que o grau da potência maior seja o dôbro do da menor, poderão também ser resolvidas por êste processo.

Problema. Achar o valor positivo de x na equação $x^6-7x^3=8$.

Solução. Substituindo x^3 e x^6 *por* y e y^2, temos a seguinte equação do segundo grau: $y^2-7y=8$. Resolvendo esta equação, como fizemos no problema precedente, temos $y=8$. Ora como $y=x^3$ segue-se que $x^3=8$, e $x=2$.

Verificação. Desde que $x^6=2^6=64$, e $7x^3=7\ (2^3)=56$, segue-se que $64-56=8$.

Regra. *Para se resolver uma equação biquadrada, substituem-se as potências* x^2 *e* x^4 *da incógnita por* y *e* y^2, *procede-se depois como uma equação do segundo grau, e na raiz considera-se* $y=x^2$.

Resolver as seguintes equações dando só os valores reais de x.

		Resp.
1.	$x^4-8x^2=9$.	$x=\pm 3$.
2.	$x^4+6x^2=135$.	» $x=\pm 3$.
3.	$x^4-6x^2=160$.	» $x=\pm 4$.
4.	$x^6-8x^3=513$.	» $x=3$.
5.	$x^4+4x^2=12$.	» $x=\pm\sqrt{2}$.
6.	$x^4-13x^2=-36$.	» $x=\pm 3$ e ± 2

RAZÃO E PROPORÇÃO

346. De dois modos podemos comparar duas quantidades da mesma espécie (homogêneas):

O primeiro modo é achar de quanto uma quantidade excede a outra.

O segundo modo é achar quantas vezes uma quantidade contém a outra.

347. As duas quantidades comparadas chamam-se termos da comparação. O primeiro termo chama-se **antecedente,** o segundo **consequente,** e o resultado da comparação chama-se **razão.**

Ilustremos este ponto. Se compararmos o número 12 com o número 4, pelo primeiro modo, acharemos que 12 excede 8 ao número 4, porque $12-4=8$. Este modo de comparar chama-se razão por diferença ou simplesmente **diferença,** porque se efetua por meio de uma subtração.

Se compararmos o número 12 com o número 4, pelo segundo modo, acharemos que 12 contém 3 vezes o número 4, porque $12\div 4=3$. Este modo de comparar chama-se razão por quociente ou simplesmente **razão,** porque se efetua por meio da divisão. É dêste último que agora vamos tratar.

348. Para indicarmos uma razão, escrevemos o antecedente e depois o consequente separados por dois pontos, como $12:4=3$ que se lê: *a razão de 12 para 4 é igual a 3*; $a:b=c$ que se lê: *a razão de a para b é igual a c*.

A razão entre duas quantidades se obtém, portanto dividindo o 1.° pelo 2.°; assim, a razão de 6 para 2 é $\frac{6}{2}$ ou

3, isto é, 6 contém 3 vezes o número 2. A razão de 2 para 6 é $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ isto é, 2 contém $\frac{1}{3}$ de 6.

349. Como a razão é sempre o quociente da divisão de uma quantidade por outra da mesma espécie, ela está sujeita às leis da divisão; e por isso «*se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma razão por um mesmo número, não alteraremos o valor da razão, isto é, do resultado da divisão.*

350. A razão entre duas quantidades pode ser um número inteiro, misto ou fracionário, como sucede com um quociente.

1.° Problema. Qual é a razão de $15a$ para $3a$?

Solução. $15a : 3a = \frac{15a}{3a} = 5$

2.° Problema. Qual é a razão de $16x^2$ para $20x$?

Solução. $16x^2 : 20x = \frac{16x^2}{20x} = \frac{4x}{5}$

Regra. *Para se achar a razão entre duas quantidades homogêneas, divide-se o antecedente pelo consequente, e o quociente será a razão.*

Exemplos para resolver:

1. Qual é a razão de $6x^2$ para $2x$? Resp. $3x$.
2. Qual é a razão de $15x$ para 3? » $5x$.
3. Qual é a razão de $20x$ para $5x$? » 4.
4. Qual é a razão de $2a^2$ para $4a$? Resp. $\frac{a}{2}$.
5. Qual é a razão de 26$ para 13$? » ?
6. Qual é a razão de $18abc$ para $6ab$? » ?
7. Qual é a razão de x^2-y^2 para $x+y$? » ?
8. Qual é a razão de $27abc^2$ para $9c^2$? » ?

Proporções

351. Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões. Assim, $a:b=c:d$ é uma proporção que mostra que a razão de a para b é igual à razão de c para d, isto quer dizer que o quociente de a dividido por b é igual ao quociente de c dividido por d.

O sinal da igualdade entre duas razões é quatro pontos::, como $a:b::c:d$, que se lê: **a** *está para* **b,** *assim como* **c** *está para* **d.**

352. Da definição apresentada conclue-se que, se quatro quantidades estiverem em proporção, a primeira dividida pela segunda será igual à terceira dividida pela quarta; de sorte que a proporção $a:b::c:d$ pode ser transformada na equação.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Nota. As palavras *razão* e *proporção* são erradamente confundidas uma com a outra na linguagem comum; assim diz-se que duas quantidades estão na proporção de 3 para 4, em vez de *na razão* de 3 para 4. A razão existe entre duas quantidades e a proporção só existe entre quatro. São necessárias duas razões iguais para formar uma proporção.

353. As quatro quantidades que formam uma proporção, chamam-se **termos da proporção,** e teem a seguinte ordem:

1.° termo		2.° termo		3.° termo		4.° termo
a	:	b	::	c	:	d

O primeiro termo e o quarto chamam-se **extremos;** e o segundo e terceiro chamam-se **meios.**

O primeiro termo e o terceiro teem também o nome de **antecedentes;** e o segundo e o quarto teem o nome de **consequentes.**

Na proporção acima a e d são extremos; b e c são meios; a e c são antecedentes, e b e d são consequentes.

354. Quando os meios de uma proporção são iguais, a proporção se chama **contínua;** o termo do meio chama-se **meio** ou **média proporcional** entre os outros dois. Assim, na proporção $a:b::b:c$, o termo b chama-se média proporcional entre a e c, e o termo c chama-se **terceira proporcional** entre a e b.

Propriedades principais das proporções

355. 1.ª Propriedade. *Em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, o quociente do primeiro termo dividido pelo segundo, deve ser igual ao quociente do terceiro dividido pelo quarto.

Multiplicando agora ambos os membros desta equação por bd para a inteirar, temos a (2.ª) equação. Cancelando os fatores b e d que são comuns, temos a (3.ª) equação que mostra o *produto dos meios igual ao produto dos extremos.*

$$a:b::c:d$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (1.^a)$$

$$\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d} \qquad (2.^a)$$

$$ad=bc \qquad (3.^a)$$

Podemos verificar esta propriedade na proporção $3:6::5:10$ onde achamos $6\times5=3\times10$.

$$3:\ 6::5:\ 10$$
$$3\times10=6\times5$$
$$30=30.$$

356. Desde que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, segue-se o seguinte corolário:

Um extremo é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo; e um meio é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.

Dados pois três termos de uma proporção, podemos facilmente achar o outro termo. Assim, na proporção $a:b::c:d$,

$$a=\frac{bc}{d},\ b=\frac{ad}{c},\ c=\frac{ad}{b} \text{ e } d=\frac{bc}{a}.$$

Resolver os seguintes problemas:

1. Os primeiros termos de uma proporção são 12, 5 e 24; qual é o quarto termo? Resp. $\frac{5\times24}{12}=10$.
2. Os primeiros termos de uma proporção são $3ab$, $4a^2b$ e $9ab^2$; qual é o quarto termo? Resp. $12a^2b^2$.
3. Os três últimos termos de uma proporção são $4ab^3$, $3a^2b^2$ e $2a^3b$; qual é o primeiro termo? Resp. ?
4. Calcular o valor de x na proporção $a:x::b:c$.
5. Qual o valor de c na proporção $a:8::c:3$?
6. Os três primeiros termos de uma proporção são ab^2, $2a^2$ e $3ac$; qual é o quarto termo? Resp. ?

357. 2.ª Propriedade. *Se o produto de duas quantidades fôr igual ao produto de outras duas, as quatro quantidades formarão uma proporção, sendo os fatores de um produto os meios, e os fatores do outro produto os extremos.*

Demonstração. Sejam os dois produtos $ad=bc$. Dividindo cada um dos produtos por bd, temos a (1.ª) equação. Cancelando os fatores d e b que são comuns, temos a (2.ª) equação que se transforma na proporção $a:b::c:d$.

$$ad=bc$$

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \qquad (1.^a)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad (2.^a)$$

$$a:b::c:d$$

Se tomarmos dois produtos numéricos e iguais, e escrevermos os fatores de um produto como meios, e os do outro como extremos, teremos aí uma proporção, como vemos ao lado.

$$5\times8=4\times10$$
$$5:4::10:8.$$

Formar proporções com os seguintes produtos:

1. $2\times18=12\times3$. Resp. $2:12::3:18$.
2. $4\times25=5\times20$. » ?
3. $xm=yn$. » ?
4. $ax=by$. » ?
5. $ac=bd$. » ?

358. 3.ª Propriedade. *Em uma proporção continua, o produto dos extremos é igual ao quadrado do meio.*

Na primeira propriedade vimos que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Então na proporção $a:b::b:c$, $bb=ac$, ou $b^2=ac$, e $b=\sqrt{ac}$. Já sabemos que b é a media proporcional entre a e c (n.º **354**).

Daqui concluimos que a *média proporcional entre duas quantidades é igual à raiz quadrada do produto delas.*

A média proporcional também se chama **média geométrica.**

Problema. Qual é a média proporcional entre 4 e 9?

Solução. O produto das duas quantidades é $4\times9=36$. A média geométrica é $\sqrt{36}=6$.

1. Qual é a média proporcional entre 9 e 16? Resp. 12
2. Qual é a média proporcional entre 16 e 25? » 20
3. Qual é a média proporcional entre 25 e 36? » 30
4. Achar a média geométrica entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$ »
5. Achar a média geométrica entre $4a$ e $49a$. » $14a$

359. 4.ª Propriedade. *Se quatro quantidades formam proporção, a primeira estará para a terceira, assim como a segunda para a quarta.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, temos a (1.ª) equação. Multiplicando ambos os membros por b e depois cancelando os fatores comuns, temos a (2.ª) equação.

Dividindo ambos os membros desta equação por c, e cancelando os fatores comuns, temos a (3.ª) equação que, transformada em uma proporção, mostra que *o primeiro termo está para o terceiro, assim como o segundo está para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1.ª)$$
$$a=\frac{bc}{d} \quad (2.ª)$$
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad (3.ª)$$
$$a:c::b:d$$

360. 5.ª Propriedade. *Se quatro quantidades formam proporção, a segunda estará para a primeira, assim como a quarta está para a terceira.*

Demonstração. Já vimos na proporção $a:b::c:d$ que o produto dos meios é igual ao dos extremos (1.ª), equação. Dividindo ambos os membros por a, e cancelando os fatores comuns, temos a (2.ª) equação. Dividindo ambos os membros desta equação por c, temos a (3.ª) equação que, transformada em uma proporção, mostra que o *segundo termo está para o primeiro, assim como o quarto está para o terceiro.*

$$bc=ad \quad (1.ª)$$
$$\frac{bc}{a}=d \quad (2.ª)$$
$$\frac{bc}{ac}=\frac{d}{c} \text{ ou } \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad (3.ª)$$
$$b:a::d:c.$$

361. 6.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam uma proporção, a soma da primeira e da segunda está para a segunda, assim como a soma da terceira e da quarta está para a quarta.*

Demonstração. Vamos provar que se $a:b::c:d$, então $a+b:b::c+d:d$.

Adicionando à (1.ª) equação uma unidade ou 1, teremos a (2.ª) equação que se modifica na (3.ª) **(n. 150).** Considerando agora esta equação como uma proporção, vemos que *o primeiro termo mais o segundo estão para o segundo, assim como o terceiro mais o quarto estão para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1.ª)$$
$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad (2.ª)$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad (3.ª)$$
$$a+b:b::c+d:d.$$

362. 7.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam proporção, a diferença entre a primeira e a segunda está para a segunda, assim como a diferença entre a terceira e a quarta está para a quarta.*

Demonstração. Da proporção $a:b::c:d$, tiramos a (1.ª) equação. Subtraindo 1 em cada membro desta equação, temos a (2.ª) equação que se modifica na (3.ª) **(n. 158).** Considerando esta equação como uma proporção, vemos que *o primeiro termo menos o segundo está para o segundo, assim como o terceiro menos o quarto está para o quarto.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1.ª)$$
$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad (2.ª)$$
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad (3.ª)$$
$$a-b:b::c-d:d$$

363. 8.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam proporção, si os antecedentes, ou os consequentes, ou, ainda, todos os termos, forem multiplicados ou divididos pela mesma quantidade, continúa a existir a proporção.*

Demonstração. Da proporção $a:b::c:d$, deduzimos a (1.ª) equação. Multiplicando ambos os membros por m, temos a (2.ª) equação. Dividindo ambos os membros por n **(n. 162),** temos a (3.ª). Considerando esta equação como uma proporção, vemos que o *primeiro termo e o terceiro estão multiplicados por* **m**; *e o segundo e quarto por* **n**, *estando na segunda proporção os mesmos termos divididos pelas mesmas quantidades.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1.ª)$$
$$\frac{ma}{b}=\frac{mc}{d} \quad (2.ª)$$
$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd} \quad (3.ª)$$
$$ma:nb::mc:nd.$$
$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{m}:\frac{d}{n}$$

364. 9.ª Propriedade. *Se os termos correspondentes de duas ou mais proporções forem multiplicadas entre si, os produtos continuarão formando proporção.*

Demonstração. Tomando as duas proporções (1.ª) e (2.ª), e multiplicando os seus termos correspondentes, temos a proporção (3.ª).

$$a:b::c:d \quad (1.ª)$$
$$e:f::g:h \quad (2.ª)$$
$$ae:bf::cg:dh \quad (3.ª)$$

Transformando as duas primeiras proporções em suas respectivas equações temos (I) e (II).

$$\text{(I)}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \text{(II)}\ \frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$

Multiplicando entre si os termos destas equações, temos a (III) equação.

Transformando esta equação em uma proporção vemos que os *diversos termos são o produto dos termos que se correspondem nas duas proporções.*

$$\text{(III)}\ \frac{a}{b}\times\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h} \text{ ou } \frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$$
$$ae:bf::cg:dh$$

365. 10.ª Propriedade. *Quando quatro quantidades formam proporção, suas potências e raizes do mesmo grau também formam proporção.*

Demonstração. Na proporção $a:b::c:d$, temos a equação (1.ª). Elevando cada uma destas quantidades à potência n (letra que representa aqui qualquer expoente de uma quantidade), temos a (2.ª) equação, a qual transformada em uma proporção, mostra *os quatro termos elevados à potencia* **n**, *e em proporção.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (1.ª)$$
$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n} \quad (2.ª)$$
$$a^n:b^n::c^n:d^n.$$

Nota. Os alunos devem verificar numèricamente cada uma destas propriedades, como fizemos com a primeira e segunda.

Resolver os exercícios:

1. Achar o valor de x na proporção $x+4:x+2::x+$ $+8:x+5$. Resp. $x=4$.

2. Achar o valor de x na proporção $x+4:2x+8::2x-$ $-1:3x+2$. Resp. $x=4$.

3. Achar o valor de x na proporção $3x+2:x+7::9x-$ $-2:5x+8$. Resp. $x=2$ ou $2\frac{1}{2}$

4. Achar a terceira proporcional entre 3 e 57. Resp. 1083.

5. Achar a terceira proporcional entre 9 e 12. Resp. ?

PROGRESSÕES

366. Progressão é uma sucessão de numeros que crescem ou decrescem em uma certa razão.

Há duas sortes de progressões denominadas:

1.ª Progressão aritmética ou por diferença;

2.ª Progressão geométrica ou por quociente.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

367. A progressão aritmética é uma série de números que crescem ou decrescem de uma quantidade constante chamada *razão;* isto é, cada número é formado do seu antecedente com o acréscimo ou diminuição dessa quantidade.

368. Se os termos vão crescendo do primeiro para o último, a progressão chama-se **crescente,** mas se vão diminuindo, chama-se **decrescente.**

Em uma progressão crescente, sendo a o primeiro termo com o valor de 20, e r a razão, com o valor de 3, temos

$a,$	$a+r,$	$a+2r,$	$a+3r,$	$a+4r,$	$a+5r,$	etc.
20,	23,	26,	29,	32,	35,	etc.

Se a série fôr decrescente, temos

$a,$	$a-r,$	$a-2r,$	$a-3r,$	$a-4r,$	$a-5r$	etc.
20,	17,	14,	11,	8,	5,	etc.

369. Os números que formam uma progressão, chamam-se **termos,** o primeiro e o último chamam-se **extremos,** e os intermediários chamam-se **meios,** e a diferença que há entre êles, ou razão, também se chama **diferença comum.** Assim na progressão

5, 9, 13, 17, 21, 25.

5 e 25 são os extremos; 9, 13, 17 e 21 são os meios; 4 é a diferença comum, e 6 é o número de termos.

370. Em cada progressão aritmética temos de considerar cinco quantidades que são:

1.ª *O primeiro termo* .. a
2.ª *O último termos* ... u
3.ª *A razão* .... r
4.ª *O número de termos* n
5.ª *A soma de todos termos* .... s

Há tal relação entre estas cinco quantidades que, sendo conhecidas sòmente três, podemos fàcilmente achar as outras duas.

Conhecendo o primeiro termo, a razão e o número de termos, achar o último termo

371. Dando-se o primeiro termo a, a razão r e o número de termos n, qual é o último termo u?

Solução. Em uma progressão crescente cada termo se forma do seu antecedente junto com a razão, como

$a, \ a+r, \ a+2r, \ a+3r, \ a+4r,$ etc.

Nesta progressão vemos, que em cada termo, o coeficiente de r é 1 menos do que o número da ordem dêsse termo na progressão; pois no segundo termo o coeficiente de r é 1 subentendido; no tercerio termo é 2; no quarto termo é 3, etc. Então o último deve ser igual a a mais a razão multiplicada pelo número de termos menos 1.

Fórmula: $u=a+r(n-1)$

Esta fórmula, traduzida em linguagem comum, dá a seguinte regra:

Regra. *O último termo é igual ao primeiro termo mais o produto da diferença comum multiplicada pelo número de termos menos 1.*

Se a progressão fôr decrescente, multiplica-se a diferença comum pelo número de termos menos 1, e o produto subtrai-se do primeiro termo.

Resolver os seguintes problemas:

1. O primeiro termo de uma progressão crescente é 3, e a razão é 2; qual é o quarto termo? Resp. $u=3+2(4-1)=9$.
2. Achar o sexto termo de uma progressão decrescente, sendo 30 o primeiro termo, e 2 a razão. Resp. $30-2(6-1)=20$.
3. Numa progressão crescente, sendo 11 o primeiro termo, e 6 a razão, qual é o décimo segundo termo? Resp. 77.
4. Qual é o décimo quinto termo da progressão 1, 6, 11, 16, 21, etc.? Resp. 71.
5. Qual é o centésimo termo da progressão 1, 7, 13, 19, 26, etc.? Resp. 595.
6. Qual é o 25° termo da progressão x, $3x$, $5x$, $7x$, etc.? Resp. $49x$.

Achar a soma de todos os termos

372. Dando-se o primeiro termo a, a razão r e o número de termos n, achar a soma de todos os termos representada por s.

Solução. Tomando uma progressão de 5 termos na ordem crescente, e a mesma progressão na ordem decrescente, começando com o último termo (u), e somando as duas progressões, temos

$$\begin{array}{l} s=a+(a+r)+(a+2r)+(a+3r)+(a+4r) \\ s=u+(u-r)+(u-2r)+(u-3r)+(u-4r) \\ \hline 2s=a+u+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u) \end{array}$$

ou $2s=(a+u)$ tomado tantas vezes quantos são os termos da progressão. Ora como o número de termos é representado pela letra n, segue-se que $2s=(a+u)n$. e $s=(a+u)n$ dividido por 2.

Fórmula: $s=\left(\frac{a+u}{2}\right)n$

Esta formula, traduzida em linguagem comum, dá a seguinte regra:

Regra. *A soma de todos os termos é igual à metade da soma do primeiro e do último multiplicada pelo número de termos.*

1. Achar a soma de todos os termos da progressão 1, 2, 3, 4, 5, etc. até 25.

Solução. Soma $=\left(\frac{1+25}{2}\right)\times 25=325$.

2. Sendo o primeiro termo de uma progressão 2, o último termo 50, e o número de termos 17, qual é a soma de todos os termos? Resp. 442.
3. O primeiro termo é 10, o último é 20, e o número de termos é 6; qual é a soma da progressão? Resp. 90.
4. O primeiro termo é $\frac{1}{2}$ o último termo é 30, e o número de termos é 50; qual é a soma da progressão inteira? Resp. ?
5. Dar a soma da progressão 2, 5, 8, 11, até o termo 20.°. Resp. ?

373. As duas fórmulas, que acabamos de expor, chamam-se **fundamentais,** porque nos oferecem duas equações que resolvem êste problema geral:

«Conhecidas três das cinco quantidades a, d, n, u, e s, que entram em uma progressão aritmética, determinar as outras duas.»

(1.ª Equação fundamental)	(2.ª Equação fundamental)
$u=a+r(n-1)$	$s=\left(\frac{a+u}{2}\right)n$

Para acharmos o valor de a, que é o primeiro termo da série, quando são conhecidos o último termo, o número de termos e razão, transporemos na 1.ª equação a letra a para o primeiro membro, e a letra u para o segundo, como se vê na equação ao lado.

$$a=u-r(n-1)$$

374. Para acharmos o valor de r, que é a razão, conhecendo u, a e n passamos $r(n-1)$ para o 1.° membro e a letra u para o segundo, como se vê na fórmula ao lado.

$$r(n-1)=u-a$$
$$r=\frac{u-a}{n-1}$$

375. Para acharmos o valor de n, que é o número dos termos, conhecendo s, a e u, faremos na 2.ª equação a transposição que vemos ao lado (Vêde **n.º 178**).

$$2s=n(a+u)$$
$$n(a+u)=2s$$
$$n=\frac{2s}{u+a}$$

Dêste modo podemos achar fàcilmente qualquer das cinco quantidades de uma progressão, sendo três delas conhecidas.

Inserir qualquer número de meios aritméticos entre dois termos dados

376. Conforme vimos na secção antecedente, a fórmula para acharmos a diferença comum dos termos é a que está ao lado, e que quer dizer: *Em qualquer progressão aritmética a razão é igual à diferença dos extremos dividida pelo número de termos menos 1.*

$$d = \frac{u-a}{n-1}$$

Se quisermos, por exemplo, inserir cinco meios entre 3 e 15, temos de achar primeiro a razão dessa progressão. Ora os extremos são 3 e 15; o número de termos inseridos com os dois extremos são $5+2=7$, então a razão é 2, como vemos na operação ao lado; e a série é

$$\frac{15-3}{7-1} = 2$$

3, 5, 7, 9, 11, 13, **15.**

377. E' evidente que, se inserirmos o mesmo número de meios entre os termos consecutivos de uma progressão aritmética, o resultado formará uma nova progressão. Assim, se inserirmos três meios entre os termos consecutivos da progressão 1, 9, 17, etc., a nova série será **1**, 3, 5, 7, **9**, 11, 13, 15, **17,** e assim por diante.

Resolver os seguintes problemas:

1. Inserir três termos entre 5 e 7.

Solução. $\frac{7-5}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Sendo a razão $\frac{1}{2}$ a série é 5, $5\frac{1}{2}$ 6, $6\frac{1}{2}$, 7.

2. Inserir 5 meios aritméticos entre 14 e 16.
Resp. $14\frac{1}{3}$, $14\frac{2}{3}$, 15 $15\frac{1}{3}$, $15\frac{2}{3}$.

3. Inserir 9 meios aritméticos entre 2 e 32.
Resp. 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

4. Inserir 6 meios aritméticos entre 1 e 50.
Resp. ?

5. O primeiro termo de uma progressão crescente é 5; o último termo é 50, e a soma de todos os termos é 275; qual é o número de termos? Resp. 10.

6. O primeiro termo de uma progressão crescente é 4; o último termo é 32, e o número de termos é 8; qual é a razão? Resp. 4.

7. O último termo de uma progressão crescente é 50; a razão é 5, e o número de termos é 10; qual é o primeiro termo? Resp. 5.

8. Cem pedras estando colocadas em linha reta com a distância de 2 metros uma da outra, quanto teria de andar a pessoa que tivesse de recolher todas as pedras uma a uma, em um cesto posto a 2 metros de distância da primeira pedra?
Resp. 20200^{m}.

Nota. A pessoa que recolher as pedras tem de andar 2 vezes a distância entre o cesto e a pedra: uma quando vai buscar a pedra, e a outra quando a traz, e por isso a razão é 2 vezes 2 metros = 4 metros; pelo mesmo motivo, o primeiro termo é 4 metros.

9. Um estudante comprou 7 objetos, cujos preços formavam uma progressão aritmética. O preço do objeto mais barato foi Cr $0,50, e o preço do mais caro foi $2,30. Achar os preços dos outros objetos.
Resp. $0,80; $1,10; $1,40; $1,70 e $2,00.

10. Se o primeiro termo de uma progressão aritmética crescente é 5, a razão é 3, e o número de termos é 15, qual é o último termo? Resp. ?

11. Em uma progressão aritmética crescente, 11 é o primeiro termo, 6 é a razão; qual é pois o vigésimo termo da progressão? Resp. 125.

12. Achar a soma da progressão 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., até 1000 termos. Resp. 500500.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

378. Progressão geométrica ou **por quociente,** é uma sucessão de números, cada um dos quais é igual ao antecedente multiplicado por uma quantidade constante, chamada **razão** da progressão geométrica.

379. A progressão geométrica pode ser *crescente* e *decrescente*. É crescente quando a razão é maior do que a unidade; neste caso cada termo é maior do que o anterior. Quando a razão é menor do que a unidade, a progressão é

decrescente, porque a multiplicação de uma quantidade positiva, qualquer que ela seja, por uma fração dá sempre um produto inferior ao multiplicando.

380. A progressão

1, 3, 9, 27, 81, 243 etc.

é crescente e sua razão é 3.

A progressão

96, 48, 24, 12, 6, 3 etc.

é decrescente e sua razão é $\frac{1}{2}$.

381. Em uma progressão geométrica, temos de considerar cinco quantidades que são:

1.ª *O primeiro termo* ..	a	4.ª *O número de termos*	n
2.ª *O último termo*	u	5.ª *A soma de todos os termos*	s
3.ª *A razão*	q		

Há tal relação entre estas 5 quantidades que, conhecidas 3 delas, podemos fàcilmente achar as outras duas.

Achar qualquer termo de uma progressão geométrica

382. Dando-se o primeiro termo representado por a, o número de termos representado por n, e a razão representada por q, achar o último termo representado por u.

Solução. Sendo a o primeiro termo, e cada termo da progressão formado do seu antecedente multiplicado pela razão, segue-se que a série deve ser

$$a, \; aq, \; aq^2, \; aq^3, \; aq^4, \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots aq^{n-1}$$

Examinando o expoente de q, vemos que no segundo termo é 1, no terceiro é 2, no quarto é 3, no quinto é 4, isto é, 1 menos que o número da ordem do termo, de sorte que no último termo, o expoente de q deve ser 1 menos que o número de termos, isto é, aq^{n-1}. Daquí temos a

Fórmula: $u=aq^{n-1}$

Está fórmula traduzida em linguagem comum dá a seguinte regra:

Regra. *O último termo de uma progressão geométrica é igual ao produto do primeiro termo multiplicado pela potência da razão cujo expoente seja 1 menos do que o número de termos.*

1. Achar o sexto termo de uma progressão geométrica, em que o primeiro termo é 3, e a razão é 2.

Solução. $u=3\times2^5=3\times32=96$.

2. O primeiro termo de uma progressão geométrica é 4, e a razão é 3; qual é o sétimo termo? Resp. 2916.

3. O primeiro termo é 5, a razão é 4; qual é o termo oitavo? Resp. 81920.

4. O primeiro termo é 7, a razão é 2; qual é o termo décimo? Resp. 3584.

5. Se um negociante, começando com 5 contos, dobrasse o seu capital cada cinco anos, quanto teria êle no fim de vinte anos? Resp. 80 contos.

Achar a soma de todos os termos de uma progressão geométrica

383. Dando-se o primeiro termo a, a razão q, e o número de termos n, achar a soma dos termos s.

Solução analítica. Se multiplicarmos qualquer progressão geométrica pela sua razão (q), o resultado será outra progressão na qual cada termo, excepto o último terá um termo correspondente na primeira série. Observemos estas duas séries

$$\text{Progressão}\times q = qs = \quad aq+aq^2+aq^3+aq^4 \;\ldots\ldots\; aq^{n-1}+aq^n$$
$$\text{Progressão} \quad s=a+aq+aq^2+aq^3 \;\ldots\ldots\ldots\; aq^{n-1}$$

Notamos aquí que os termos das duas progressões são idênticos, exceto o primeiro termo da primeira progressão, e o ultimo termo da segunda. Se agora subtrairmos a primeira progressão da outra que foi multiplicada por q, todos os termos do meio desaparecerão, restando sòmente os dois extremos, isto é, aq^n-a; então temos

$$sq-s=aq^n-a$$
$$s(q-1)=aq^n-a$$
$$\text{ou } s=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

Já vimos (**n. 382**) que $u=aq^{n-1}$; multiplicando ambos os termos desta igualdade por q, temos $uq=aq^n$. Substituindo no valor de s a quantidade aq^n por uq, temos a

Fórmula: $s=\dfrac{uq-a}{q-1}$

Esta fórmula, traduzida em linguagem comum, dá a seguinte regra:

Regra. *Para se achar a soma dos termos de uma progressão geométrica, multiplica-se o último termo pela razão, do produto subtrai-se o primeiro termo, e o resto divide-se pela razão menos 1.*

1. Achar a soma de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 4, a razão é 3, e o último termo 2916.

Solução. $\frac{(2916 \times 3)-4}{3-1} = 4372.$

2. Achar a soma de uma progressão geométrica, na qual o primeiro termo é 7, a razão é 2, e o último termo é 3584. Resp. 7161.

3. Sendo o primeiro termo de uma progressão geométrica 5, a razão 4, e o último termo 81920, qual é a soma dos termos dessa progressão? Resp. 109225.

4. Achar a soma dos 7 primeiros termos da progressão 1, 2, 4, 8, etc. Resp. 127.

5. Achar a soma dos 10 primeiros termos da progressão 4, 12, 36, etc. Resp. ?

6. Achar a soma dos 9 primeiros termos da progressão 5, 20, 80, etc. Resp. ?

Problemas variados para o exame

1. Reduzir $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ à sua expressão mais simples. Resp. $\frac{a-b}{a+b}$.

2. Achar o valor de x na equação $x+\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}=\frac{3x}{7}+53$. Resp. $x=105$.

3. Resolver a equação $2x+\frac{ax-b}{3}=x-a$. Resp. $x=\frac{b-3a}{a+3}$.

4. Ha dois números cuja soma é 37, e se três vezes um deles fôr subtraído de quatro vezes o outro e esta diferença fôr dividida por 6, o quociente será 6. Quais são os números? Resp. 16 e 21.

5. Achar os valores de x e y nas seguintes equações simultâneas: $2x+7y=65$ e $6x-2y=34$. Resp. $x=8$, $y=7$.

6. Achar os valores de x, y e z no seguinte sistema de equações: $2x+6y+5z=93$, $4x+3y+8z=95$ e $5x+4y+9z=116$. Resp. $x=7$, $y=9$, $z=5$.

7. Elevar $m-n$ à quinta potência por meio do binômio de Newton.

Resp. $m^5-5m^4n+10m^3n^2-10m^2n^3+5mn^4-n^5$.

8. Qual é a raiz quadrada de 178929? Resp. 423.

9. Reduzir o radical $\sqrt{486a^2b^4x^5}$ à sua forma mais simples. Resp. $9ab^2x^2\sqrt{6x}$.

10. Achar o valor de x na equação $x^2+6x=27$. Resp. $x=+3$ e -9.

11. Resolver a equação $x+\sqrt{x^2-3x+60}=12$. Resp. $x=4$.

12. Formar uma equação completa do segundo grau, cujas raízes sejam 5 e 6. Resp. $x^2-11x=-30$.

13. Dividir o número 33 em duas partes de sorte que o seu produto seja 162. Resp. 27 e 6.

14. Achar o valor de x na proporção $x+4:x+2::x+8:x+5$. Resp. $x=4$.

15. Achar o oitavo termo de uma progressão geométrica cujo primeiro termo seja 5, e a razão 4. Resp. 81920.

16. Decompor o trinômio $x^2+6x-27$ em dois fatores binômios. Resp. $(x-3)\ (x+9)$.

17. A soma dos quadrados de dois números é 260, e a diferença dêsses quadrados é 132; quais são os números? Resp. ± 8 e ± 14.

18. Um negociante comprou 3 peças de sêda, que somavam 111 metros. A segunda peça tinha 11 metros mais do que a primeira, e a terceira tinha 17 metros mais do que a segunda; quantos metros tinha cada uma? Resp. 1.ª=24, 2.ª=35, 3.ª=52.

19. Achar dois números cuja soma seja 16, e a soma dos seus quadrados seja 130. Resp. 7 e 9.

20. Um fazendeiro empregou na colheita do café 5 homens e 4 rapazes; no fim do primeiro dia de trabalho, pagou-lhes o jornal que importou em Cr $10,50; no segundo dia empregou 8 homens e 6 rapazes, e pagou-lhes na mesma razão,

importando o salario em Cr $16,50, qual foi o jornal de cada homem, e de cada rapaz? Homem $1,50; rapaz, $0,75.

21. Na Noruega foi pescado um bacalhau cujo rabo pesava 9 quilos; a cabeça pesava tanto como o rabo e metade do corpo, e o corpo pesava tanto como o rabo e a cabeça; quanto pesava o peixe? (Chama-se corpo no enunciado à parte entre a cabeça e o rabo).

22. Simplificar a expressão $5a^2+3mn-(2a^2-mn-b)$.
Resp. $3a^2+4mn+b$.

23. Quando Dante viu a Beatriz pela primeira vez, tinha 8 anos mais do que ela, e ela tinha $\frac{5}{7}$ da idade dêle; quais eram as suas idades? Resp. ?

— FIM —

ÍNDICE

PAGS.

Explicação dos sinais algébricos 8
Exercícios sôbre os símbolos algébricos 10
Definições de alguns termos algébricos 11
Exercícios sôbre os símbolos das potências 13
Expressões algébricas 13
Modo de enunciar as expressões algébricas 16
Adição 16
Primeiro caso da adição .. 17
Segundo caso da adição .. 18
Terceiro caso da adição .. 20
Subtração 21
Primeiro caso da subtração 22
Segundo caso da subtração 22
Terceiro caso da subtração 23
Quarto caso da subtração .. 24
Aplicação do parêntesis na adição e subtração 26
Multiplicação 28
Primeiro caso da multiplicação 29
Segundo caso da multiplicação 32
Terceiro caso da multiplicação 32
Uso do parêntesis na multiplicação 33
Divisão 35
Primeiro caso da divisão .. 35
Segundo caso da divisão .. 39
Terceiro caso da divisão .. 40
Teoremas 42
Divisores e múltiplos 46
Decomposição das expressões algébricas 48
Decomposição dos polinômios 49

PAGS.

Máximo divisor comum 52
Achar o máximo divisor comum de monômios ... 54
Máximo divisor comum dos polinômios 55
Mínimo múltiplo comum ... 56
Frações algébricas 58
Reduzir frações algébricas à expressão mais simples .. 60
Transformar frações algébricas em expressões inteiras ou mistas 61
Dar a uma expressão mista a forma de uma fração 62
Reduzir frações a um denominador comum 64
Achar o mínimo denominador comum 66
Adição de frações 67
Subtração de frações 68
Multiplicação de frações .. 70
Divisão de frações 72
Equações do primero grau 74
Transformação das equações 76
Eliminar os denominadores 77
Transpor os termos de uma equação 78
Redução de termos semelhantes 79
Regra geral para a solução 80
Problemas 82
Equações simultâneas com duas incógnitas 90
Eliminação pela redução ao mesmo coeficiente 91
Eliminação por comparação 93
Eliminação por substituição 94
Problemas com duas incógnitas 95
Equações simultâneas contando mais de duas incógnitas 98
Problemas indeterminados .. 100

	Pags.
Demonstrações algébricas ..	102
As quatro operações sôbre frações	105
Generalização	107
Primeiro caso de generalização	107
Segundo caso de generalização	109
Terceiro caso de generalização	110
Quarto caso de generalização	111
Formas da solução	112
Solução positiva	112
Solução negativa	113
Solução infinita	114
Solução zero	116
Solução indeterminada	116
Discussão dos problemas ...	117
Desigualdades	121
Formação das potências	125
Elevação de um monômio a qualquer potência	126
Elevação de um polinômio a qualquer potência	127
Elevar uma fração a qualquer potência	128
Binômio de Newton	128
Outros modos de formar um quadrado	133
Extração da raiz quadrada ..	135
Modo prático da extração	139
Extração da raiz quadrada das frações	140
Extração da raiz quadrada dos monômios	141
Extração da raiz quadrada dos polinômios	142
Radicais do segundo grau ..	144
Redução de um radical à sua forma mais simples	145
Adição dos radicais do segundo grau	147
Subtração dos radicais do segundo grau	148
Multiplicação dos radicais do segundo grau	149
Divisão dos radicais do segundo grau	150
Resolução das equações que contém radicais	151
Equações do segundo grau ..	153
Resolução das equações incompletas da forma $x^2=q$	155
Resolução das equações incompletas da forma $ax^2=bx$	158
Resolução das equações completas do segundo grau ..	159
Achar as raízes das equações completas	161
Formas da equação completa do segundo grau	164
Achar as raízes de uma equação completa por meio da forma generalizada ...	166
Propriedades das equações completas do segundo grau	166
Trinômios do segundo grau	168
Sistemas do segundo grau de duas equações contendo duas incógnitas	169
Equações biquadradas	171
Razão e Proporção	173
Proporções	174
Propriedades principais das proporções	175
Progressões	180
Progressão aritmética	180
Achar o último termo da progressão	181
Achar a soma de todos os termos	182
Inserir qualquer número de meios aritméticos entre dois termos dados	184
Progressão geométrica	185
Achar qualquer termo de uma progressão geométrica	186
Achar a soma de todos os termos	187
Problemas variados para o exame	188

N.º 4.774 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

26

Extrato do Catálogo da Livraria Francisco Alves